Homeomorphism

정의 1 *$f : X \to Y$ is an open map if f(open set) is open. Also, $f : X \to Y$ is a closed map if f(closed set) is closed.*

Note: f is open $\iff$ f(basic open set) is open
(증명은 $f(\bigcup B_\alpha) = \bigcup f(B_\alpha)$ 로 부터 분명하다.)

예1. The projection map $p_\alpha : \prod_\alpha X_\alpha \to X_\alpha$ is open and continuous but not closed.
예2. $\exists f$ which is open and closed but not continuous.(exercise)
예3. $\exists f$ which is closed and continuous but not open.(exercise)

위의 세 예제에서 알수 있듯이 함수가 open, closed 혹은 연속이라는 것은 서로 무관한 개념이다.

명제 1 *$f : X \to Y$ is open $\iff$ $f(A^i) \subset f(A)^i, \ \forall A \subset X$.*
$f : X \to Y$ is closed $\iff$ $f(\bar{A}) \supset \overline{f(A)}, \ \forall A \subset X$.

증명
첫번째 명제:
$\Rightarrow$) 방향:
f is open $\Rightarrow f(A^i)$ is open $\Rightarrow f(A^i) = f(A^i)^i \subset f(A)^i$
$\Leftarrow$) 방향:
A is open $\Rightarrow A = A^i$. 따라서 가정으로 부터 $f(A) = f(A^i) \subset f(A)^i$이되므로 $f(A) = f(A)^i$이 되고 $f(A)$는 open 이다.

두번째 명제:
$\Rightarrow$) 방향:
f is closed $\Rightarrow f(\bar{A})$ is closed $\Rightarrow f(\bar{A}) = \overline{f(\bar{A})} \supset \overline{f(A)}$

$\Leftarrow$) 방향:

A is closed $\Rightarrow A = \bar{A}$. 따라서 가정으로 부터 $f(A) = f(\bar{A}) \supset \overline{f(A)}$이 되므로 $f(A) = \overline{f(A)}$이 되고 $f(A)$는 closed 이다. $\square$

정의 2 *$f : X \to Y$ is a homeomorphism if f is a continuous bijection whose inverse f^{-1} is also continuous.*

따라서 homeomorphism은 1-1, onto 함수로써 open set를 open set으로 정확히 대응시켜 주는, 다시말하면 topology를 정확히 보존하는 map이다.
두개의 위상공간 X와 Y사이에 homeomorphism 이 존재하면 위상구조에 관한한 X와 Y는 완전히 동일하며 이경우 우리는 X와 Y가 homeomorphic하다고 부른다. 이것은 두개의 group사이에 isomorphism이 두개의 대수구조를 보존하는 것과 같이 위상공간들 사이에 equivalence를 준다.

명제 2 *$f : X \to Y$ 가 bijection이면 다음은 모두 동치이다.*

1. f 가 homeomorphism이다.

2. f 가 연속이고 open이다.

3. f 가 연속이고 closed이다.

4. $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ (i.e., f가 closure를 보존)

5. $f(A^i) = f(A)^i$ (i.e., f가 interior를 보존)

증명 1 $\Leftrightarrow$ 2:

f^{-1}가 연속 $\Leftrightarrow (f^{-1})^{-1}$(open set) is open. $\Leftrightarrow f$(open set) is open $\Leftrightarrow f$가 open

1 $\Leftrightarrow$ 3:

f^{-1}가 연속 $\Leftrightarrow (f^{-1})^{-1}$(closed set) is closed. $\Leftrightarrow f$(closed set) is closed $\Leftrightarrow f$가 open

3 $\Leftrightarrow$ 4:

$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$; f가 연속일 필요충분조건

$f(\bar{A}) \supset \overline{f(A)}$; f가 closed일 필요충분조건 이므로 분명하다.

1 $\Rightarrow$ 5:

homeomorphism이 topology를 보존하므로 topology로 부터 정의되는 모든 개념들을 보존하게되고 따라서 interior를 보존한다.

$5 \Rightarrow 1$:

$f(A^i) = f(A)^i$이면 위 proposition에서 f 가 open. 또한 $B = f(A)$ 라 놓으면 $A = f^{-1}(B)$ (f 가 bijection이므로) 이고 대입하면 $f(f^{-1}(B)^i) = B^i$, 따라서 $f^{-1}(B)^i = f^{-1}(B^i)$ 이므로 위 proposition에서 f^{-1} 는 open 이며 따라서 f는 연속이 된다. $\square$

예1. 임의의 두 개구간은 homeomorphic하다.

(0,1) 과 (a, b) 에 대해서만 생각하면 충분하고 이 둘 사이의 homeomorphism은 $y = (b-a)x + a$로 주어진다.

임의의 두 폐구간에 대해서도 마찬가지로 생각할 수 있다.

예2. 임의의 개구간과 $\mathbb{R}$은 homeomorphic하다.

$y = \tan x$는 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 와 $\mathbb{R}$사이의 homeomorphism이 되고 예1에서의 결과로 임의의 개구간에도 똑같은 주장이 성립한다.

예3. $(1,3) - \{2\} \cong (1,2) \cup (3,4)$

예4. 개구간, 반개구간, 폐구간은 서로 homeomorphic 하지않다.(왜?)

예5. 원, 타원, 삼각형은 전부 서로 homeomorphic하다.

예6. 지팡이와 십자가는 서로 homeomorphic 하지않다.(왜?)

예7. $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N} \ncong \mathbb{Q}$

예8. $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

예9. 보통band와 Möbius band는 서로 homeomorphic 하지 않다.(왜?)