Embedding

정의 1 *$f : X \to Y$ is called an embedding if $f : X \to f(X)$ is a homeomorphism. (여기서 $f(X)$의 topology는 물론 Y의 subspace topology 이다.)*

다음은 몇가지 그림이다.

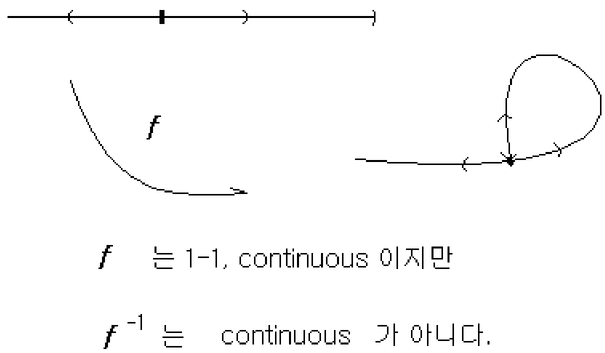

그림 1: not embedding

그림 2: embedding

다음은 몇가지 formal한 예들이다.
예1. $A \subset X$ 일때 inclusion map $i : A \hookrightarrow X$는 embedding이 된다.
$i : A \to i(A) = A$ 에서 i가 identity map 이 되어 homeomorphism이 됨은 당연하다.

예2. 입체사영(Stereographic Projection)을 통하여 $\mathbb{R}^n$을 $\mathbb{S}^n$로 보내는 embedding을 얻을 수 있다.

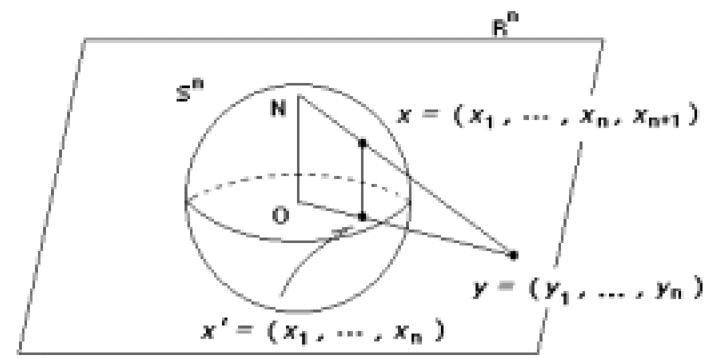

그림 3: Stereographic projection

$\mathbb{S}^n$위의 한점 $x=(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$에 대하여 $\mathbb{R}^n$의 한점 $y=\sigma(x)=(y_1,\ldots,y_n)=\frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1,\ldots,x_n)$을 대응시키는 map σ를 stereographic projection 이라 한다. 그러면 $\sigma^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{S}^n$는 $x\mapsto\frac{2}{1+|y|^2}(y_1,\ldots,y_n,\frac{|y|^2-1}{2})$ 로 주어지고 $\mathbb{R}^n$을 $\mathbb{S}^n$으로 보내는 embedding이된다. 따라서 $\mathbb{S}^n=\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$으로 볼 수 있다. 이런 것을 one-point compactification이라 부른다.

예3. Graph map 은 embedding이다.
$f:X\to Y$ 의 graph는 $Graph(f)=\{(x,f(x))\in X\times Y\}$이다.
그러면 graph map $F:X\to X\times Y$, $x\mapsto(x,f(x))$의 image는 $F(X)=Graph(f)$이 되고 F는 embedding이 된다. 사실 F가 1-1, 연속임은 분명하고, $F^{-1}:Graph(f)\to X$ 는 projection map p_1의 restiction이므로 연속이 되고 $F:X\to Graph(f)=F(X)$는 homeomorphism이 된다. 따라서 $F:X\to X\times Y$는 embedding이 된다.

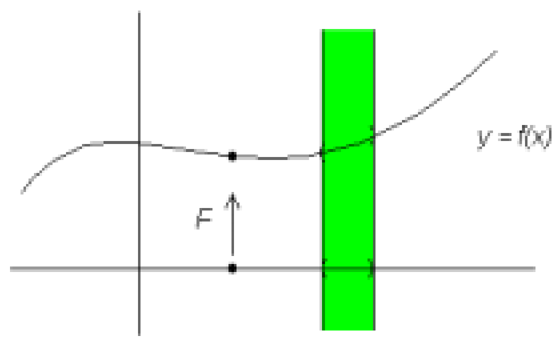

그림 4: Graph