IV.2 Urysohn Lemma

정리 1 ***(Urysohn lemma)*** *normal space X 상의 disjoint closed set C와 D가 주어졌을때, $f(C) = 0$ and $f(D) = 1$ 이 성립하는 연속함수 $f : X \to [0,1]$가 존재한다.*

증명 먼저 $O_1 := D^c \supset C$ 라 하면 X의 normality에 의해

$$C \subset O_0 \subset \overline{O_0} \subset O_1$$

을 만족하는 open set O_0가 존재한다. 여기서 다시한번 normality를 생각해보면 $\overline{O_0} \subset O_1$ 사이에

$$\overline{O_0} \subset O_{1/2} \subset \overline{O_{1/2}} \subset O_1$$

되도록 $O_{1/2}$를 끼워넣을수 있고, 비슷한 방법으로 $O_{1/4}$, $O_{3/4}$를 끼워넣어

$$\overline{O_0} \subset O_{1/4} \subset \overline{O_{1/4}} \subset O_{1/2} \subset \overline{O_{1/2}} \subset O_{3/4} \subset \overline{O_{3/4}} \subset O_1$$

이 되도록 할 수 있다. 이와같은 작업을 반복하여

$$\{O_r | r \in A\},\ A = \left\{ \frac{m}{2^n} \middle| m = 1, 2, \cdots, 2^n - 1,\ \ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

를 생성하면 항상 $\overline{O_t} \subset O_s$ if $t < s$ 이 된다. 이때 A 가 $[0,1]$ 의 dense subset 이라는 것을 유의해야한다. 이제

$$f : X \to [0,1] \ \text{ by } \ f(x) = \begin{cases} sup\{s \,|\, x \notin O_s\} \\ \\ 0 \ \text{ if } \ x \in O_0 \end{cases}$$

를 정의하자. 이렇게 정의한 함수 f는 자명하게 $f(C) = 0,\ f(D) = 1$ 이 된다. 함수가 연속임을 증명할때 subbasis의 역상이 open임을 보이면 충분하므로 $f^{-1}[0,a)$와 $f^{-1}(a,1]$이 open in X 임을 보이면 증명이 끝난다.

$$f^{-1}[0,a) = \left\{ x \,\middle|\, 0 \le f(x) < a \right\} = \bigcup_{t<a} O_t :$$

i) ($\subset$): $x \in f^{-1}[0,a) \Rightarrow f(x) < a \Rightarrow f(x) < t < a$ for some $t \in A \Rightarrow x \in O_t$.
($\because x \notin O_t \Rightarrow t \in \{s | x \notin O_s\} \Rightarrow t \le sup\{s \,|\, x \notin O_s\} = f(x)$ 모순.)
ii) ($\supset$): $x \in O_t \Rightarrow t \notin \{s|x \notin O_s\} \Rightarrow a > t \ge sup\{s|x \notin O_s\} = f(x)$.
위와같이 $f(x) < a \iff x \in O_t$ for some $t < a$ 이 되어 $f^{-1}[0,a)$는 O_t 들의 union 이 되고 open 이다.

$$f^{-1}(a,1] = \left\{ x \;\middle|\; a < f(x) \leq 1 \right\} = \bigcup_{t>a} \overline{O_t}^{\,c} :$$

i) ($\subset$): $a < f(x) \Rightarrow a < t < t' < f(x)$ for some $t, t' \in A$ s.t $x \notin O_{t'} \Rightarrow x \notin \overline{O_t} \Rightarrow x \in \overline{O_t}^{\,c}$.
ii) ($\supset$): $x \in \overline{O_t}^{\,c}, t > a \Rightarrow x \notin \overline{O_t} \Rightarrow x \notin O_t \Rightarrow f(x) = sup\{s | x \notin O_s\} \geq t > a$.
따라서 $f^{-1}[0,a)$ 와 마찬가지로 $f^{-1}(a,1]$ 또한 open 이된다.

$\square$

Remark X : normal $\Rightarrow \exists$ *bump funtion* $f : X \to [0,1]$ for any pair $C^{closed} \subset U^{open}$, i.e.,

$$f = \begin{cases} 1 & \text{in } C \\ 0 & \text{in } U^c \end{cases}$$