Baire Space and Category

정의 1 $A \subset X$ is nowhere dense if $\overline{A}^i = \emptyset$, or equivalently $\overline{A}^c$ is dense.

명제 1 *Suppose X is a space, then the followings are equivalent.*

1. *A countable intersection of open dense sets in X is dense.*
2. *A countable union of closed sets with empty interior has empty interior.*
3. *A countable union of nowhere dense sets has empty interior.*

증명
(1 $\Leftrightarrow$ 2) It is clear since U_n is open dense iff $(U_n)^c$ is closed with an empty interior, and

$$(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n)^c = (\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^c).$$

(2 $\Rightarrow$ 3) Suppose $\{U_n\}$ is a countable collection of nowhere dense sets. Since $\overline{U_n}$ is a closed set with an empty interior, by the assumption, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$ has an empty interior. Thus $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ has an empty interior.
(3 $\Rightarrow$ 2) By definition a closed set with an empty interior is nowhere dense. $\square$

정의 2 A space X is a Baire space if it satisfies any of the equivalent statements in the above proposition.

Note: $A \subset X$ 가 dense 하다는 것은 A^c의 interior가 empty라는 것과 동치이다. 즉 다른말로하면 X의 임의의 open set이 A와 만난다는 뜻이다.

예1. $\mathbb{Q}$ 는 Baire space가 아니다.
$\mathbb{Q} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}$에서 각$\{r\}$들은 closed이고 interior가 empty이지만. 이것들의 countable union은 $\mathbb{Q}$ 전체가 되고 따라서 interior가 empty가 아니다.

예2. $\mathbb{Z}$ 는 Baire space이다.
$\mathbb{Z}$의 dense subset은 자기자신뿐이다. 왜냐하면 $\mathbb{Z}$의 topology는 discrete topology이고 따라서 한점으로 된 집합 $\{n\}$이 open set이 된다. 그러므로 한점이라도 빠지면 dense가 안되기 때문이다.
따라서 정의로부터 자명하게 $\mathbb{Z}$는 Baire space가 된다.

그러면 자연스럽게 $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$이 Baire space인지 아닌지의 여부에 대한 물음이 생긴다. 이 물음에 대한 대답은 긍정적인데 다음의 정리를 증명하면 바로 알 수 있다.

정리 2 *(Baire) A locally compact Hausdorff or a complete metric space is a Baire space.*

증명
X가 locally compact Hausdorff 이면 $\forall x \in X$와 x의 neighborhood U에 대해 $x \in V \subset \overline{V} \subset U$이고 $\overline{V}$가 compact가 되는 V가 존재한다.
이제 D_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$를 dense open set이라 두고 $\forall U$에 대해 다음을 보이려 한다.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \cap U \neq \emptyset :$$

D_n이 dense라는 사실로부터
$D_1 \cap U \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in D_1 \cap U \Rightarrow \exists V_1$ such that $x \in V_1 \subset \overline{V_1} \subset D_1 \cap U$
$D_2 \cap V_1 \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in D_2 \cap V_1 \Rightarrow \exists V_2$ such that $x \in V_2 \subset \overline{V_2} \subset D_2 \cap V_1 \subset D_1 \cap U$

$$\vdots$$

$\exists V_n$ such that $V_n \subset \overline{V_n} \subset D_n \cap V_{n-1}$.
따라서 $\cdots \subset \overline{V_n} \subset V_{n-1} \subset \overline{V_{n-1}} \subset \overline{V_1}$ 이고 $\overline{V_1}$은 compact이다.
$\{\overline{V_n}\}$ has F.I.P. $\Rightarrow \bigcap \overline{V_n} \neq \emptyset$. 그리고 $\bigcap \overline{V_n} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m \cap U$.
따라서 locally compact Hausdorff 공간에 대해서는 증명이 끝났다.

다음으로 complete metric 공간에 대해서도 이와 비슷한 방법을 사용하는데 V_n 대신에 open ball B_n을 사용한다.
마찬가지로 D_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$를 dense open set이라 두고 $\forall U$에 대하여 다음을 보인다.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \cap U \neq \emptyset :$$

$D_1 \cap U \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ an open ball $B_1(x_1, r_1)$ of radius $r_1 < 1$ such that $\overline{B_1} \subset D_1 \cap U$
$D_2 \cap B_1 \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ an open ball $B_2(x_2, r_2)$ of radius $r_2 < \frac{1}{2}$ such that $\overline{B_2} \subset D_2 \cap B_1$

$$\vdots$$

$\exists B_n$ of radius $r_n < \frac{1}{n}$ such that $\overline{B_n} \subset D_n \cap B_{n-1}$
$\{x_n\}$가 Cauchy 수열 $\Rightarrow x_n \to \exists x \in X$
$\forall m, \{x_n\}_{n \geq m} \subset B_m \Rightarrow x \in \overline{B_m} \subset D_m \cap B_{m-1} \subset D_m \cap U$.
$\therefore x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m \cap U$

□

Interesting applications

1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$는 G_δ -set(i.e., a countable intersection of open sets)이 아니다:

만약 G_δ -set이라고 가정하면 적당한 open set O_n들이 존재해서 $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$으로 나타내어질 수 있다. 그러면 각각의 O_n이 $\mathbb{R}$의 open dense subset이 되어야 한다. $(\because \mathbb{Q} \subset O_n)$

또한 $U_r = \mathbb{R} \setminus \{r\}$, $r \in \mathbb{Q}$로 놓으면 U_r이 dense 인것은 자명하다.

그런데 각각의 O_n, U_r들이 open dense subset이므로

$$\emptyset = \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \cap \bigcap_{r \in \mathbb{Q}} U_r$$

은 $\mathbb{R}$의 dense subset이다.

공집합이 dense subset 일 수 없으므로 이것은 모순이고 따라서 증명이 되었다.

2. $\nexists\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous precisely at $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$:

반면에 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$에서 precise하게 연속인 함수는 존재하는데 그러한 예를 다음과 같이 구체적으로 만들어 보자.

먼저 $\mathbb{Q}$와 $\mathbb{N}$사이에 1-1 대응을 주는 함수 φ에 대해 f를 다음처럼 놓는다.

$$f = \begin{cases} \frac{1}{\varphi(x)} & x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

그러면 이 함수는 정확히 무리수점들에서 연속이다.

(왜냐하면 임의의 ϵ에 대하여 $\frac{1}{\varphi(x)} > \epsilon$ 인 x는 유한개 뿐이다.)

그러면 다시 처음으로 돌아가서 반대로 정확히 유리수점들에서 연속인 함수가 존재하지 않는것을 보이자.

그러한 함수 f가 존재한다고 가정하자. $O_n = \bigcup\{O^{open} \subset \mathbb{R} \mid diam f(O) < \frac{1}{n}\}$으로 두면

$$\mathcal{C}(f) := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$$

은 바로 f가 연속인 점들의 집합이된다.

가정으로부터 $\mathcal{C}(f) = \mathbb{Q}$이다.

정의로부터 $\mathcal{C}(f)$는 G_δ -set이다. (open set들의 countable intersection이므로)

그런데 1번에서 $\mathbb{Q}$가 G_δ -set이 아님을 보였고 따라서 모순이다.

그러므로 정확히 유리수점들에서 연속인 함수는 존재하지 않는다.

예. point, line, curve는 nowhere dense이다.
$\mathbb{Q}$는 $\mathbb{R}$위에서 nowhere dense가 아니다.
cantor set C는 nowhere dense이다.

정의 3 X의 nowhere dense set들의 countable union을 1st category set이라하고 다른 모든 set을 2nd category set이라 한다.

예. $\mathbb{Q}$는 1st category ($\because \mathbb{Q} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{r\}$)

정리 3 *(Baire) X is a Baire space*
$\Leftrightarrow$ *the interior of a 1st category set is empty*
$\Leftrightarrow$ *a set containing open set is of 2nd category*
$\Leftrightarrow$ *a non-empty open set is of 2nd category.*

증명 A subset of a nowhere dense set is nowhere dense and hence a subset of 1st category set is of 1st category. $\square$

전공간 X 자신도 분명히 open이므로 정리의 내용에서 바로 다음을 얻을 수 있다.

따름정리 4 *1. Baire space 자신은 2nd category.*
2. X가 Baire space일 때 X의 subset A가 1st category 이면 A^c는 2nd category set이다.

(만약 그렇지 않다고 가정하면 $X = A \cup A^c$이므로 X가 1st category인데 이것은 위의 따름정리에 의해 모순이다.)

예. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$는 2nd category

Homework
1. Baire space의 open subset은 Baire space.
2. Baire space의 G_δ -subset은 Baire space.