Nowhere Differential function

이번장에서는 $[0,1]$에서 $\mathbb{R}$로 가는 nowhere differentiable continuous function이 존재함을 알아보자.
(실제로 이러한 함수들은 dense하게 존재한다. 즉, 이러한 함수들의 집합은 함수공간의 dense subset이 되며 따라서 임의의 함수를 이러한 함수들로 근사시킬수 있다.)
$\mathcal{C} := \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ with sup metric $d(f,g) = \max\limits_{x \in I} |f(x) - g(x)|$
$\Rightarrow \mathcal{C}$는 complete metric space.
$\Rightarrow \mathcal{C}$는 Baire space.

주어진 $\alpha \gg 0$, $0 < h \ll 1$에 대하여 다음을 정의한다.
$\Delta f(x,h) = \max(\left|\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right|, \left|\dfrac{f(x-h) - f(x)}{-h}\right|)$
and

$$U(\alpha, h) = \{f \in \mathcal{C} \mid \Delta f(x,h) \geq \alpha, \forall x\}$$

*톱날 함수 f의 typical한 모습

$U_n = \bigcup \{U(\alpha, h) \mid \alpha > n, h < \frac{1}{n}\}$라고 하자.

그런데 $f \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ 이면 f는 nowhere differentiable function이 된다:

$\because \forall n,\ f \in U_n$
$\Rightarrow \forall n,\ \exists \alpha_n > n,\ h_n < \frac{1}{n}$ such that $f \in U(\alpha_n, h_n)$
$\Rightarrow \forall n,\ \Delta f(x, h_n) \geq \alpha_n > n,\ \forall x \in I$
$\Rightarrow \forall x \in I,\ \lim\limits_{h \to 0} \Delta f(x,h)$가 존재하지 않는다.

만일 f가 미분가능하다면 $\lim\limits_{h \to 0} \Delta f(x,h) = |f'(x)|$ 가 되어야 한다. 따라서 f가 어느점에서도 미분가능하지 않음을 알 수 있다.

이제 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$가 dense함을 보이자.
$\mathcal{C}$가 Baire라는 성질로부터 U_n이 open dense라는 것을 보이면 앞장의 정리에 의해 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$가 dense임을 알 수 있다.

Claim 1. U_n is open:

(증명) $f \in U_n \Rightarrow f \in U(\alpha, h)$ for some $\alpha > n$, $h < \frac{1}{n}$. 이제 적당한 ϵ에 대해 $d(f,g) < \epsilon \Rightarrow g \in U_n$임을 보이자.
$|\Delta f(x,h) - \Delta g(x,h)| \leq \left| \frac{f(x+h)-g(x+h)-(f(x)-g(x))}{h} \right| \leq \frac{2\epsilon}{h}$.
만일 $\epsilon = \frac{h(\alpha-n)}{4}$으로 선택하면 $|\Delta f - \Delta g| \leq \frac{\alpha-n}{2}$되고
$n < \alpha - \frac{\alpha-n}{2} \leq \Delta f - \frac{\alpha-n}{2} \leq \Delta g \leq \Delta f + \frac{\alpha-n}{2}$이 된다.

Claim 2. U_n is dense:

(증명) 주어진 $g \in \mathcal{C}$, $\epsilon > 0$에 대하여 $d(f,g) < \epsilon$ 인 $f \in U_n$가 존재함을 보이자. $diam(g([x_i, x_{i+1}])) < \frac{\epsilon}{2}$을 만족하는 $[0,1]$의 partition이 존재한다.
그러면 각 $[x_i, x_{i+1}] \times g[x_i, x_{i+1}]$ 부분을 U_n에 들어가는 적당한 톱날 함수들로 대체해서 연결해도 U_n에 들어간다. 이때 관찰 포인트는 톱날함수 f에서 한 작은 톱날의 경사선분의 기울기들 중 가장 작은 값을 α로, 또 이 선분을 빗변으로 가지는 직각삼각형의 밑변을 1/2 보다 작은 h를 선택하면 $f \in U(\alpha, h)$이 된다.