Orientation

정의 1 For each point p in a plane, there are two different choices of rotations, namely clockwise and counter-clockwise. The choice of one rotation is called an *orientation at p.*

(Or equivalently, choice of ordered basis (e_1, e_2) at p, such that the rotation from e_1 to e_2 matches up the given orientation. In this case (e_1, e_2) and (b_1, b_2) give the same orientation iff det A > 0 where $(e_1, e_2)A = (b_1, b_2)$.)

이 basis를 이용한 방법은 보다 일반적인 차원에서 orientation을 정의할 수 있는 방법을 준다.

정의 2 Let M be a surface (with or without boundary). Since M is locally Euclidean(i.e., plane), each point of M has a two choices of orientation. M is called *orientable* if we can select a "continuous"(i.e locally constant) choice of orientation at each point.

예. $\mathbf{R}^2$ (or any open subset of $\mathbf{R}^2$) is orientable.

Surface의 orientation.
1. S^2 : $\mathbf{R}^3$ 자체는 orientable이므로 한 orientation(예컨데 우수계)를 고정시켜 놓자. 그러면 normal vector N과 S^2의 orientation이 합하여 $\mathbf{R}^3$의 orientation을 유일하게 결정할 수 있으므로 normal vector를 연속적으로 잡을 수 있으면 S^2의 orientation을 연속적으로 선택할 수 있다. 따라서 $\mathbf{R}^3$에 embedded된 surface에 대해서는 orientable이냐 아니냐 하는 것은 normal vector를 연속적으로 선택할 수 있느냐 아니냐와 같다. S^2의 경우 normal vector를 일제히 바깥 방향으로 잡으면 연속이므로 orientble이다.
2. T^2 : 위와 마찬가지이므로 역시 orientable이다.
3. Möbius band : normal vector의 연속적인 선택이 불가능하므로 non-orientable.

Exercise. Continuous choice of orientation 은 각 coordinate chart의 선택에 무관하다.
Note. *Orientability is a topological invariant.*
Orientation through triangulation.
1. Suppose M has a triangulation. Then M is orientable if and only if the two "induced orientation" on each edge from two neighboring triangles are opposite.

즉, 두 인접한 삼각형에서의 orientation이 공통 edge에서 상쇄되게 주어졌다면 이 두 삼각형에서의 orientation은 서로 같다. 다시말해 연속적으로 두 orientation이 연결된다는 것을 뜻한다. 따라서 모든 삼각형에 대하여

orientation을 주되 공통 edge에서 서로 상쇄될 수 있게 할 수 있다면 M은 orientatable하게 된다.

2. Suppose M is obtained from polygon identifying each pairs of edges. The same idea applies.

즉 서로 identify되는 바깥 edge들에 대해서만 induced orientation이 cancel 되는지를 살펴보면 된다.
(그림참조)

명제 1 *M is non orientable if and only if M contains a Möbius band.*

증명 $\Leftarrow$) Clear. M의 triangulation과 각 삼각형에 orientation을 어떻게 주던지 Möbius band의 중심선을 따른 triangulation에서는 각 삼각형의 orientation이 공통 edge에서 서로 cancel되게 할 수 없다.
$\Rightarrow$) Let $M = D/\sim$. (D is a polygon.) We extend an orientation at a point in D toward the boundary in a unique way. 앞에서 한 것처럼 D의 boundary를 identify하는 정보에 따라 시계방향으로 예컨데 $\cdots a \cdots a' \cdots$ 처럼 나열할 수 있다. 여기서 어떻게 identify하느냐에 따라 $a' = a^{\pm 1}$이 된다. 만일 M이 non-orientable 하면 이들 나열에서 induced orientation이 서로 상쇄되지 않는 edge가 있어야 하므로 어떤 edge a 에 대해 $\cdots a \cdots a \cdots$ 와 같이 되어야 하고 이 a를 두 변으로 하는 사각형을 도려내어 a를 identify 해 보면 Möbius band가 된다. □

명제 2 *M is a closed(i.e.,compact without boundary) surface.*
$$\Rightarrow M = T^2 \sharp T^2 \cdots \sharp T^2 \text{ or } = P^2 \sharp P^2 \cdots \sharp P^2$$

증명 먼저 $T^2 \sharp P^2 = P^2 \sharp P^2 \sharp P^2$임을 보이자. (첫번째 방법)그림에서. (두번째 방법) 다각형의 identification으로. $T^2 \sharp P^2 = P^2 \sharp P^2 \sharp P^2$임을 보였으므로, 만일 P^2가 하나라도 있으면, 모든 T^2는 P^2로 바꿀 수 있다. 따라서 T^2로만 혹은 P^2로만 connected sum 되어 있는 경우로 나눌 수 있다. □