Base point change

For $x_0, x_1 \in X$, compare $\pi_1(X, x_0)$ with $\pi_1(X, x_1)$. Choose a path ρ from x_0 to x_1 and *define* $\phi_\rho : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ *by* $\{\alpha\} \mapsto \{\rho^{-1} * \alpha * \rho\}$. *Then* ϕ_ρ *is an isomorphism.*

증명

(1) ϕ_ρ가 homomorphism임을 보이자 :

$$\begin{aligned}\phi_\rho\{\alpha * \beta\} &= \{\rho^{-1} * \alpha * \beta * \rho\} \\ &= \{\rho^{-1} * \alpha * \rho * \rho^{-1} * \beta * \rho\} \\ &= \{\rho^{-1} * \alpha * \rho\}\{\rho^{-1} * \beta * \rho\} \\ &= \phi_\rho\{\alpha\}\phi_\rho\{\beta\}.\end{aligned}$$

(2) Define $\phi_{\rho^{-1}}$ for ρ^{-1} similarly and show $\phi_{\rho^{-1}} = (\phi_\rho)^{-1}$:

$$\begin{aligned}(\phi_{\rho^{-1}} \circ \phi_\rho)\{\alpha\} &= \phi_{\rho^{-1}}\{\rho^{-1} * \alpha * \rho\} \\ &= \{\rho * \rho^{-1} * \alpha * \rho * \rho^{-1}\} \\ &= \{\alpha\}.\end{aligned}$$

여기서 $\rho * \rho^{-1} \sim e \sim \rho^{-1} * \rho$ 임을 사용하였다.

Similarly $\phi_\rho \circ \phi_{\rho^{-1}} = id$. □

Remark. If X is path connected, then we denote its fundamental group simply by π_1(X) if the choice of base point is not important.

만일 path ρ가 주어지면 그에 따라 isomorphism ϕ_ρ 가 얻어진다. 이 때 또다른 path σ가 주어지는 경우 이에 따른 ϕ_ρ 와 ϕ_σ 와의 관계를 살펴보자. 먼저 $\rho \simeq \sigma$ 인 경우 $\phi_\rho = \phi_\sigma$ 이다. $\rho \not\simeq \sigma$인 경우는 어떻게 될까?

숙제 5.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\phi_\rho} & \pi_1(X, x_1) \\ & \phi_\sigma \searrow & \uparrow \mu \\ & & \pi_1(X, x_1) \end{array}$$

에서 $\mu = \phi_\rho \circ \phi_{\sigma^{-1}}$ 로 두면 이는 isomorphism 이 되고, 이것은 어떤 loop에 의한 conjugation (an inner automorphism of $\pi(X, x_1)$)이 됨을 보여라.