Definition of Fundamental Group

정의 1 $\Omega(X, x_0) := \{\alpha : I \to X \mid \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$ *: loop space of* X *based at* x_0*.*

Define $\sim$ *on* $\Omega = \Omega(X, x_0) : \alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha \simeq \beta$ *relative to* ∂I*,*
i.e., $\exists\ F : I \times I \to X$ such that

1. $F(t, 0) = \alpha(t), \forall t \in I.$
2. $F(t, 1) = \beta(t), \forall t \in I.$
3. $F(0, s) = x_0 = F(1, s), \forall s \in I.$

In general for f and $g : X \to Y$, f is homotophic to g, denoted by $f \simeq g$, if $\exists$ a map $F : X \times I \to Y$ such that

1. $F(x, 0) = f(x), \forall x \in X.$
2. $F(x, 1) = g(x), \forall x \in X.$

Note. $\sim$ is an equivalence relation.
(reflexive) $\alpha \sim \alpha$
(symmetric) $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$:
$\alpha \sim \beta$를 주는 homotopy F에 대해 G(t,s)=F(t,1-s)로 주면 이는 $\beta \sim \alpha$ 를 만족하는 homotopy가 된다.
(transitive) $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$:
F: homotopy between α and β, G: homotopy between β and γ 라 하자. 이 때, H를

$$H(t, s) = \begin{cases} F(t, 2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ G(t, 2s - 1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

로 두면 H 는 α 와 γ 사이의 homotopy가 된다.

Introduce a group structure on $\Omega/\sim$.
두 개의 loop 또는 일반적으로 두 개의 path α, β에 대해서 product path $\alpha * \beta$를

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

로 정의하자. 그러면
(a) $*$ *defines a multiplication on* $\Omega/\sim$*, i.e.,* $\{\alpha\}\{\beta\} = \{\alpha * \beta\}$:
이 곱이 $\Omega/\sim$ 에서 잘 정의가 된다는 것을 보이자.
Show $\alpha_1 \sim \alpha_2, \beta_1 \sim \beta_2 \Rightarrow \alpha_1 * \beta_1 \sim \alpha_2 * \beta_2$:
F를 α_1, α_2의 homotopy, G를 β_1, β_2 의 homotopy로 두면

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(2t - 1, s), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

가 $\alpha_1 * \beta_1, \alpha_2 * \beta_2$ 사이의 homotopy 를 준다.
$\therefore \{\alpha\}\{\beta\} = \{\alpha * \beta\}$ is well defined on $\Omega/\sim$.

(b) Associativity, i.e., $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$:
$(\alpha * \beta) * \gamma$ 와 $\alpha * (\beta * \gamma)$ 는 사실상 같은 path 의 reparametrization이므로 다음 Note만 보이면 된다.

Note. In general, if $\beta(t) = \alpha(\phi(t))$ where $\phi : I \to I$ with $\phi(0) = 0$ and $\phi(1) = 1$, is a *reparametrization*, then $\alpha \sim \beta$.
(증명) F(t,s) : $= \alpha(s\phi(t) + (1-s)t)$ 는 연속이고
$F(t,0) = \alpha(t)$, $F(t,1) = \alpha(\phi(t)) = \beta(t)$ 사이에 원하는 homotopy를 준다.

(c) Existence of an identity e: $I \to \{x_0\} \subset X$. *(a constant loop.)*
$\alpha * e$ 는 α의 reparametrization이므로 위의 Note에 따라 $\alpha * e \sim \alpha \sim e * \alpha$.

(d)Existence of an inverse.
Given $\alpha \in \Omega$, define $\overline{\alpha}(t) := \alpha(1-t)$. Then $\alpha * \overline{\alpha} \sim e \sim \overline{\alpha} * \alpha$.
$F : I \times I \to X$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$F(t,u) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \le u \le 1-2t. \\ \overline{\alpha}(2t-1), & u \le 2t-1. \\ \alpha(1-u) = \overline{\alpha}(u), & u \ge |1-2t|. \end{cases}$$

그러면 F는 연속이고 $\alpha * \overline{\alpha}$와 e 사이에 homotopy를 준다. 같은 방법으로 $\overline{\alpha} * \alpha \sim e$ 도 역시 보일 수 있다.

정의 2 *(The fundamental group.)*
$\pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0)/\sim$을 X의 fundamental group (based at x_0)라고 부른다.