

Homotopy Invariance(Preliminary version)

정리 1 $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ and $f \simeq g$ relative to x_0 .

$\Rightarrow f_{\#} = g_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

증명 $F(x,t)$ 를 f 와 g 사이의 homotopy 라 하면, $G(x,t)=F(\alpha(x), t)$ 는 $f \circ \alpha$ 와 $g \circ \alpha$ 사이의 homotopy를 준다. 따라서

$f_{\#}(\{\alpha\}) = \{f \circ \alpha\} = \{g \circ \alpha\} = g_{\#}(\{\alpha\})$. □

따름정리 2 $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0), g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ and

$g \circ f \simeq 1_X$ relative to $x_0, f \circ g \simeq 1_Y$ relative to y_0 .

$\Rightarrow f_{\#} = (g_{\#})^{-1} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ is an isomorphism.

정의 1 X is homotopy equivalent to Y (or X has the same homotopy type as Y), denoted by $X \simeq Y$,

if $\exists f : X \rightarrow Y$ and $g : Y \rightarrow X$ such that $f \circ g \simeq 1_Y$ and $g \circ f \simeq 1_X$.

In this case f is called a homotopy equivalence.

따라서 위 따름정리 2는 π_1 이 homotopy (base point x_0 를 보존하는) equivalent 한 공간들에 대해 같다는 것을 보여준다.

Example. $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S^1$.

$f(x) = \frac{x}{|x|}, g = inclusion$ 으로 주면 $f \circ g = 1_Y$ 이고

$g \circ f$ 는 $F(x, t) = (1 - t)x + t\frac{x}{|x|}$ 에 의해 1_X 와 homotopic하다.

숙제 4.

1. $\mathbf{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$.

2. \simeq is an equivalence relation.

3. Möbius band 와 annulus는 homotopy type 이 같은가?

4. $T^2 \setminus \{point\} \simeq$ figure eight.