

Homotopy invariance(general version)

정리 1 If $f \simeq g : X \rightarrow Y$, then the following diagram

$$\begin{array}{ccc}
 & f_{\#} & \\
 \pi_1(X, x_0) & \rightarrow & \pi_1(Y, f(x_0)) \\
 g_{\#} \searrow & & \downarrow \phi_{\rho} \quad \text{commutes,} \\
 & & \pi_1(Y, g(x_0))
 \end{array}$$

where $\rho(t) := F(x_0, t)$ and F is a homotopy between f and g .

증명 $\phi_{\rho} \circ f_{\#} = g_{\#}$ 임을 보이자.

즉, $\rho^{-1} * (f \circ \alpha) * \rho \sim g \circ \alpha$ 를 주는 homotopy 를 찾으면 된다.

****그림 1,2****

왼쪽 그림에서 boundary condition 을 만족하는 homotopy 만 찾으면 되므로 먼저 그림 1의 boundary를 그림 2의 boundary에 맞게 shrink시킨 후 boundary사이의 map을 extend시키면 된다. 즉 원하는 homotopy 의 존재성은 일반적으로 map $\phi : \partial D^2 \rightarrow \partial D^2$ 를 $\bar{\phi} : D^2 \rightarrow D^2$ 로 extend시킬 수 있다는 사실로부터 증명된다. (예를 들어 radial extension이 있다.) 따라서

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha \times id & & F \\
 I \times I & \rightarrow & X \times I \rightarrow Y
 \end{array}$$
 에 대해 $F \circ (\alpha \times id) \circ \bar{\phi}$ 가 원하는 homotopy를 준다.

□

정리 2 X, Y are path connected. $X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

More precisely, if $f : X \rightarrow Y$ is a homotopy equivalence, then

$f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ is an isomorphism.

증명 Let g be a homotopy inverse of $f : X \rightarrow Y$, i.e., $g \circ f \simeq id_X$ and $f \circ g \simeq id_Y$.

****그림****

$id_X \simeq g \circ f$ 사이의 homotopy 동안의 x_0 의 path를 ρ 라 두자.

그러면 앞의 정리에 의해 다음 diagram,

$$\begin{array}{ccc}
 & (g \circ f)_{\#} & \\
 \pi_1(X, x_0) & \rightarrow & \pi_1(X, (g \circ f)(x_0)) \\
 id_{\#} \searrow & & \uparrow \phi_{\rho} \\
 & & \pi_1(X, x_0)
 \end{array}$$

이 commute하므로 $\phi_{\rho} \circ id_{\#} = (g \circ f)_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, (g \circ f)(x_0))$. 따라서 $\phi_{\rho} = g_{\#} \circ f_{\#}$ 이고 ϕ_{ρ} 는 isomorphism 즉 onto 이므로 $g_{\#} : \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, (g \circ f)(x_0))$ 역시 onto 이다. (여기서 $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$.) 이번에는 $g \circ f$ 대신에 $f \circ g$ 에 대하여 마찬가지로 하면 $\phi_{\sigma} = f_{\#} \circ g_{\#}$ 역시 isomorphism 즉 1-1 이므로 $g_{\#} : \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, (g \circ f)(x_0))$ 은 1-1이 된다. (여기서의 $f_{\#}$ 은 $f_{\#} : \pi_1(X, g \circ f(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, f(g \circ f(x_0)))$ 이 되어 위 문단의 $f_{\#}$ 과는 다르다.) 따라서 $g_{\#}$ 은 isomorphism이 된다. 따라서 위 문단에서의 $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ 은 isomorphism 이 된다.

□