

## Product and topological group

**정리 1** *If  $X$  and  $Y$  are path connected, then  $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ .*

**증명** Define  $\phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ ,  

$$\{\alpha\} \mapsto (\{p_1 \circ \alpha\}, \{p_2 \circ \alpha\})$$

where  $p_1, p_2$  are projections to  $X$  and  $Y$  respectively.

일반적으로 두 homomorphism  $\phi_1 : G \rightarrow H_1, \phi_2 : G \rightarrow H_2$  에 대해  $\phi(g) = (\phi_1(g), \phi_2(g)) : G \rightarrow H_1 \times H_2$  역시 homomorphism이 되므로 위에서의  $\phi$  는 homomorphism이 된다. 이제  $\phi$ 의 역함수를 찾기 위해 아래와 같이  $\psi$ 를 정의하자.

$$\begin{aligned} \psi : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) &\rightarrow \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \\ (\{\beta\}, \{\gamma\}) &\mapsto \{\delta\} \end{aligned}$$

, where  $\delta(t) = (\beta(t), \gamma(t))$

이  $\psi$ 는  $\phi$ 의 역함수가 되고 이제  $\psi$ 가 잘 정의되었는지 살펴보면 된다.

$F : \beta \sim \beta', G : \gamma \sim \gamma'$  일 때  $H(t, s) = (F(t, s), G(t, s))$ 로 주면 이는  $\delta$ 와  $\delta'$  사이의 homotopy를 주므로  $\psi$ 가 잘 정의되었음을 알 수 있다.

□

### 예 3. Topological group

**정리 2**  *$G : a$  path connected topological group with identity  $e \Rightarrow \pi_1(G, e)$  is abelian.*

**증명**  $\{\alpha\}, \{\beta\} \in \pi_1(G, e)$ 에 대해  $\{\alpha\}\{\beta\} = \{\beta\}\{\alpha\}$ 임을 보이기 위해  $\{\alpha\}\{\beta\}\{\alpha\}^{-1}\{\beta\}^{-1} = 1$ 임을 보이자.  
 $\{\alpha\}\{\beta\}\{\alpha\}^{-1}\{\beta\}^{-1} = \{\alpha * \beta * \bar{\alpha} * \bar{\beta}\} \simeq 1$ 을 보이기 위해  $\alpha * \beta * \bar{\alpha} * \bar{\beta}$ 를 다음과 같이 보자.

\*\*그림 1,2\*\*

그림 2에서 먼저 보면,

$F : I^2 \rightarrow G$  given by  $F(t,s) = \alpha(t)\beta(s)$ 는 group  $G$  안에 곱이 정의되므로  $I^2$ 상에서 연속함수로 잘 정의되고  $I^2$ 의 boundary는 사실상  $\alpha * \beta * \bar{\alpha} * \bar{\beta}$ 를 준다. 즉 그림 1의 boundary에서 그림 2의 boundary로  $e$ 들을 한 점으로 보내는 연속함수가 있고, 이것은 앞 여러 곳에서 본 것같이  $I^2$ 의 내부로도 extend된다(예컨대 radial extension).

또 다르게 보는 방법은

$$\{\alpha\}\{\beta\}\{\alpha\}^{-1}\{\beta\}^{-1} = F_{\#}(\{\partial I^2\}) = F_{\#}(1) = 1.$$

**Exercise.** 위 증명의 마지막 과정에서 보다 일반적으로 다음을 이용해서 증명해도 된다. □

$\{\alpha\} \in \pi_1(X, x_0)$ ,  $\alpha : S^1 = \partial D^2 \rightarrow X$  에 대해  
 $\{\alpha\} = 1$  if and only if  $\alpha$  can be extended to  $D^2$