

Definitions and Examples

Assumption. All the spaces in this chapter are path connected and locally path connected.

정의 1 Let $p : \tilde{X} \rightarrow X$. \tilde{X} is a covering space of X with a covering map p if
 (1) p is onto and
 (2) each $x \in X$ has a neighborhood U which is evenly covered, i.e.,
 $p^{-1}(U) = \coprod_{a \in A} V_a$ is a disjoint union of open sets V_a of \tilde{X} such that
 $p|_{V_a} : V_a \rightarrow U$ is a homeomorphism, $\forall a \in A$.

따라서 임의의 $x \in X$ 에 대해 $p^{-1}(x)$ 는 discrete하다.

Examples.

1 . $id : X \rightarrow X$.

2 . $p : \mathbf{R} \rightarrow S^1(\subset \mathbf{C})$ given by $p(x) = e^{2\pi ix}$.

3 . $p : S^1 \rightarrow S^1$ given by $p(z) = z^n$.

위와 같이 p^{-1} 의 image가 n 개인 경우를 n -sheeted covering 혹은 n -fold covering 이라고 부른다.

4 . $p : S^n \rightarrow P^n = S^n / \sim$.

이 경우 quotient map p 는 covering map이 되고 특히 two fold covering(double covering) 이 된다.

5 . $p : \mathbf{R}^2 \rightarrow T^2 = S^1 \times S^1$ given by $(x, y) \mapsto (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$.

Excercise. If $p : \tilde{X} \rightarrow X$, $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ are covering maps, then $p \times q : \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y$ is also a covering map. (예 2번과 5번에서 볼 수 있다)

6 . non-covering

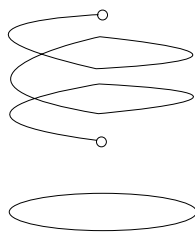


그림 1

p 는 local homeomorphism 은 되지만 covering map은 될 수 없다.(왜 그런가?)

7 . (figure eight, torus 등의 n-fold covering.)

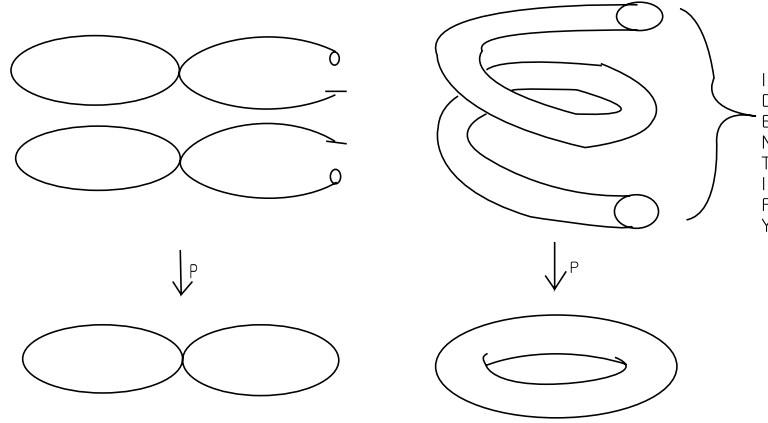


그림 2

8 . Möbius band 의 double covering 은 annulus 가 되고 3-fold covering은 다시 Möbius band 가 된다. 같은 방법으로 Klien bottle의 double covering은 torus가 된다. 일반적으로 다음을 증명하라.

Note.

1 . M is a manifold $\Rightarrow \widetilde{M}$ is also a manifold.

(증명) 각 $x \in \widetilde{M}$ 에 대해 $p(x) \in M$ 가 coordinate chart (U, φ) 를 가지고, 또한 $p(x)$ 는 evenly cover 되는 neighborhood V 를 가진다. 이 때 $U \cap V$ 에 대해 $p^{-1}(U \cap V)$ 를 생각해 보면, 이 중 x 를 포함하는 $U \cap V$ 의 copy가 있고 이 copy와 $\varphi \circ p$ 가 x 의 coordinate chart 를 준다.

Excercise. If M is a C^∞ -manifold $\Rightarrow \widetilde{M}$ is also a C^∞ -manifold .

2 . M is orientable $\Rightarrow \widetilde{M}$ is also orientable.

(증명) 먼저 \widetilde{M} 의 각 점 x 에 orientation을 주자. \widetilde{M} 의 orientation 은 local homeomorphism p 를 이용하여 $p(x)$ 의 orientation을 그대로 가져다 쓴다. 그러면 각 $x \in \widetilde{M}$ 에 대해 orientation이 locally constant가 되는 $p(x)$ 의 근방 U 를 잡을 수 있고, 또한 $p(x)$ 에서 evenly cover 되는 V 를 잡을 수 있다. 이 때 $p^{-1}(U \cap V) = \coprod_{a \in A} W_a$ 중 x 를 포함하는 W_a 에서 orientation은 p 에 의해 $U \cap V$ 의

orientation과 같으므로 locally constant이다.

숙제 7.

Every non-orientable manifold has an orientable double covering manifold.

3. M is a compact manifold, p is a finite covering $\Rightarrow \widetilde{M}$ is compact.

4. M 이 orientable이고 genus 를 g 개 가진 경우, 이에 따른 \widetilde{M} 를 살펴보자. 위의 내용에 따라 \widetilde{M} 는 역시 orientable이므로 χ 만 알면 \widetilde{M} 를 결정할 수 있다. 그런데 \widetilde{M} 가 n -fold 라면 M 의 triangulation을 \widetilde{M} 위로 올리면 V, E, F 모두 n 배가 되므로 χ 역시 n 배가 된다. 비슷한 방법으로 M 이 non-orientable 일 때는 orientable double covering \widetilde{M} 를 가지므로 M 으로부터 \widetilde{M} 을 결정할 수 있다.