Fundamental group of S^1

정리 1 $\pi_1(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$.

증명 Let $p : \mathbf{R} \to S^1$ be a covering map given by $p(x) = e^{2\pi ix}$.
If $\alpha \in \Omega(S^1, 1)$, then α can be lifted uniquely to $\widetilde{\alpha} : I \to \mathbf{R}$ with $\widetilde{\alpha}(0) = 0$.
Define $\phi : \Omega(S^1, 1) \to \mathbf{Z}$ by $\alpha \mapsto \widetilde{\alpha}(1)$. Now note that ϕ induces
"ϕ" : $\pi_1(S^1, 1) \to \mathbf{Z}$ by 따름정리 3.
이 ϕ가 isomorphism임을 보이기 위해 먼저 homomorphism임을 보이자.
$\phi(\{\alpha\}\{\beta\}) = \phi(\{\alpha * \beta\}) = \widetilde{\alpha * \beta}(1)$이고 이것이 $\widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}(1)$임을 보이기 위해 τ를 다음과 같이 정의하자.
$\tau : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be a translation given by $\tau(x) = x + \widetilde{\alpha}(1)$.
이 때, $\widetilde{\alpha * \beta} = \widetilde{\alpha} * (\tau \circ \widetilde{\beta})$이 성립한다. 먼저 $\widetilde{\alpha} * (\tau \circ \widetilde{\beta})$는 잘 정의되었는지 즉 $\widetilde{\alpha}(1) = (\tau \circ \widetilde{\beta})(0)$ 인지 살펴보자. $\widetilde{\alpha}$와 $\widetilde{\beta}$는 둘 다 0에서 출발하는 path이고 τ는 $\widetilde{\alpha(1)}$만큼 translation 시켜주는 map이므로, $\widetilde{\beta}(0)$는 τ에 의해 $\widetilde{\alpha}(1)$으로 옮겨지고 $\widetilde{\alpha} * (\tau \circ \widetilde{\beta})$는 잘 정의된다.
다음으로 $\widetilde{\alpha} * (\tau \circ \widetilde{\beta})$ 가 $\alpha * \beta$의 lifting 임을 보이자.
$p \circ (\widetilde{\alpha} * (\tau \circ \widetilde{\beta})) = (p \circ \widetilde{\alpha}) * (p \circ (\tau \circ \widetilde{\beta})) = (p \circ \widetilde{\alpha}) * (p \circ \widetilde{\beta}) = \alpha * \beta$
따라서 $\widetilde{\alpha * \beta} = \widetilde{\alpha} * (\tau \circ \widetilde{\beta})$가 만족하고 다음이 성립한다.
$\widetilde{\alpha * \beta}(1) = \widetilde{\alpha} * (\tau \circ \widetilde{\beta})(1) = (\tau \circ \widetilde{\beta})(1) = \tau(\widetilde{\beta}(1)) = \widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}(1)$.

다음으로 ϕ 가 1-1 임을 보이자.
만일 $\phi(\{\alpha\}) = 0$ 이라면 $\widetilde{\alpha}(1) = 0$ 이 되어 $\widetilde{\alpha}$ 는 0을 base point로 하는 loop가 된다. 즉 $\widetilde{\alpha} \in \Omega(\mathbf{R}, 0) \Rightarrow \{\widetilde{\alpha}\} \in \pi_1(\mathbf{R}, 0) = 0$이므로
$0 = p_\sharp\{\widetilde{\alpha}\} = \{p \circ \widetilde{\alpha}\} = \{\alpha\} \in \pi(S^1, 1)$. 즉 $\{\alpha\} = 0$이다.
마지막으로 ϕ가 onto임을 보이기 위해 $\forall\, n \in \mathbf{Z}$에 대해 $\widetilde{\alpha}(t) = nt$, $\alpha = p \circ \widetilde{\alpha}$로 잡으면, $\phi(\{\alpha\}) = \widetilde{\alpha}(1) = n$ 이 된다. 따라서 ϕ는 onto이다.

□

명제 2 *Let $f : S^1 \to X$. Then the followings are equivalent.*
1 . f is homotopic to a constant map.
2 . $f_\sharp : \pi_1(S^1) \to \pi_1(X)$ is 0.
3 . f can be extended to a map $\overline{f} : D^2 \to X$.
(In this case f is said to be inessential.)

증명 $(1 \Rightarrow 3)$
$F : S^1 \times I \to X$ 가 f와 c_{x_0}사이의 homotopy라면 F는 $S^1 \times I$를 $q : S^1 \times I \to D^2/S^1 \times \{1\}$로 quotient한 quotient space상에서의 map $\overline{F}$를 induce한다.

F

$$
\begin{tikzcd}
S^1 \times I \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & X \\
S^1 \times I / S^1 \times \{1\} \arrow[ur, "\exists \overline{F}"'] &
\end{tikzcd}
$$

이 때 diagram의 아랫쪽에 있는 $S^1 \times I/(S^1 \times \{1\})$이 D^2 와 homeomorphism 임을 보이기 위해 다음과 같이 π를 정의하자.

$\pi : S^1 \times I \to D^2$, $\pi(x,t) = (1-t)x$

그러면 다음 diagram 을 그릴 수 있다.

$$
\begin{tikzcd}
D^2 & S^1 \times I \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "F"] \arrow[d, "q"'] & X \\
 & S^1 \times I / S^1 \times \{1\} \arrow[ul, "\exists \overline{\pi}"] \arrow[ur, "\exists \overline{F}"'] &
\end{tikzcd}
$$

이 때, π 에서 induced된 $\overline{\pi}$에 대해 $\overline{\pi}$ 는 1-1, onto를 만족한다. 그런데 D^2 는 Hausdorff space이고, $S^1 \times I/S^1 \times \{1\}$ 는 compact 이므로, $\overline{\pi}$는 homeomorphism 이 된다. 이제 $g = \overline{F} \circ \overline{\pi}^{-1} : D^2 \to X$ 를 생각해보면, 이는 $g|_{S^1} = f$를 만족하고, 따라서 f는 D^2로 extend 된다.

$(3 \Rightarrow 2)$

$$
\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & X \\
 & D^2 \arrow[u, "\exists \overline{f}"']
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1) \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[dr, "i_\sharp"'] & \pi_1(X) \\
 & \pi_1(D^2) \arrow[u, "\overline{f}_\sharp"']
\end{tikzcd}
$$

위 diagram 에서 왼쪽 그림이 commute하고, funtorial property에 의해 오른쪽 그림도 commute한다. $\pi_1(D^2) = 0$이므로 $f_\sharp = 0$이다.

$(2 \Rightarrow 1)$

$\pi_1(S^1)$의 원 $\{\alpha\}$를 $\alpha(t) = e^{2\pi i t}$로 잡았을 때, 2에서 주어진 f에 의해 $f_\sharp = 0$ 이므로 $f \circ \alpha \sim c_{x_0}$ 가 된다.

diagram

$\overline{F}|_{S^1 \times \{0\}} = f$ and $\overline{F}|_{S^1 \times \{1\}} = x_0$.

$\square$