Applications

Fundamental theorem of algebra :
$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ *has at least one zero.*$(z, a_i \in \mathbf{C})$

증명 먼저 $|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0| < 1$ 이라고 가정해도 좋다. 왜냐하면, $z = \lambda x (\lambda > 0)$ 으로 놓고 $f(z)$ 를 λ^n으로 나누면
$x^n + \frac{a_{n-1}}{\lambda}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{\lambda^{n-1}}x + \frac{a_0}{\lambda^n} = 0$
이 되므로, $|\frac{a_{n-1}}{\lambda}| + \cdots + |\frac{a_0}{\lambda^n}| < 1$ 을 만족하는 큰 λ 를 잡으면 된다.

이제 $f(z)$가 근을 가지지 않는다고 가정하자. 그러면 $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ 이고, $k(z) = z^n : S^1 \to S^1$ 에 대해 $f|_{S^1} \simeq k : S^1(\subset \mathbf{C}) \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ 임을 보이자.
Define $F(z,t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0), \qquad 0 \le t \le 1.$
먼저 F가 $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ 으로 가는지를 보이자. $0 \le t \le 1$, $|z| = 1$ 이고 위에서 $|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0| < 1$임을 가정하였으므로

$$\begin{aligned}
|F(z,t)| &\ge |z|^n \ - \ t \mid a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_0 \mid \\
&\ge |z|^n \ - \ t(\, |a_{n-1}z^{n-1}| + \cdots + |a_0| \,) \\
&= 1 - t(|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots |a_0|) \\
&> 0
\end{aligned}$$

이고, 이는 $f|_{S^1}$ 와 k 간에 homotopy를 준다.

이제 다음 diagram 을 살펴보면,

$$S^1 \hookrightarrow \mathbf{C} \xrightarrow{f} \mathbf{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{p} S^1 \qquad \text{where} \quad p : z \mapsto \frac{z}{|z|}.$$

S^1에서 $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ 으로 가는 map $f|_{S^1}$와 k 에 대해 $f|_{S^1} \simeq k$ 이고, $p \circ k = k$ 이므로 $p \circ f|_{S^1} = g$ 라고 놓았을 때 $g = p \circ f|_{S^1} \simeq p \circ k = k$ 이다. 따라서 $g_\sharp = k_\sharp : \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^1)$ 인데, f는 D^2로 extend 되므로 g 역시 마찬가지이다. 즉 $g_\sharp = 0$ 인데 반해 $k_\sharp : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ 는 n배 해주는 homomorphism이어서 이는 모순이 된다.

□

정리 1 *(Existence of "가마")*
Let $f : D^2 \to \boldsymbol{R}^2$ be a non-vanishing continuous vector field. Then $\exists$ a point of S^1 where f is directly inward, i.e., $f(x) \cdot x < 0$.(Similarly $\exists$ a point of S^1 where f is directly outward, i.e., $f(x) \cdot x > 0$)

증명 inward point가 없다고 가정하자. 즉 $f(x) \cdot x \ge 0, \forall x \in S^1$ 이라고 할 때
Define $F(x,t) : S^1 \times I \to \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ by $F(x,t) = tf(x) + (1-t)x$.
(1) F 가 잘 정의되었음을 보이자. 즉, F가 0이 되지 않음을 보이자.

만일 $tf(x)+(1-t)x=0$이라면,
$|tf(x)+(1-t)x|^2=t^2|f(x)|^2+2tx(1-t)f(x)+(t-1)^2|x|^2=0$
을 만족하고, 여기서 각 항이 모두 0보다 크거나 같으므로 모두 0이 되어야한다. $|x|=1$이므로 $t=1$이고, 따라서 $f(x)=0$ 이므로 이는 f가 non-vanishing 이라는데에 모순이다. 그리고 $F(x,0)=x, F(x,1)=f(x)$ 이므로 F는 x와 $f(x)$ 사이의 homotopy를 준다.

(2)
$$S^1\times I \xrightarrow{F} \mathbf{R}^2\setminus\{0\} \xrightarrow{p} S^1$$

이므로 $p\circ inclusion = id \simeq p\circ f : S^1\to S^1$ 이다. 하지만 f는 원래 D^2로 extension이 가능하므로 $p\circ f$ 역시 가능하고 따라서 $(p\circ f)_\sharp = 0$ 이다. 즉 $id=0:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$이므로 이는 모순이다.
"outward point"의 경우에는 f대신 $-f$를 쓰면 된다.

$\square$

정리 2 $\nexists$ *non-vanishing continuous vector field on* S^2*.*

증명 먼저 nonvanishing vector field가 S^2위에 존재한다고 가정하자. S^2상의 북극 N에서의 vector v를 생각하면 연속이라는 조건에서 v와 거의 같은 vector를 가지는 N의 적당한 근방이 존재한다.
이제 S^2를 $\mathbf{R}^2$로 stereographic projection을 한다. 그러면 D^2상의 nonvanishing vector field를 얻는데 이것을 자기자신의 길이로 나누어 얻어지는 unit vector field를 f라 두면 다음 그림에서 f는 z를 z^2 으로 보내는 map과 homotopic함을 알 수 있고, 따라서 $f_\sharp$은 $\times 2$로 주어지는 map이다. 하지만 f는 $f|_{S^1}:S^1\to S^1$에서 D^2 로 확장되므로 $f_\sharp=0$ 이고, 이는 모순이다.

그림3

$\square$