$p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$

정리 1 *Let $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to (X, x_0)$ be a covering.*
Then $p_\sharp : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to \pi_1(X, x_0)$ is a monomorphism.

증명
$p_\sharp\{\widetilde{\alpha}\} = \{p \circ \widetilde{\alpha}\} = \{\alpha\} = 1$이라고 가정하면 $\alpha \sim x_0$를 만족하는 homotopy F가 존재한다.(x_0는 constant loop)
따름정리 3으로부터 $\widetilde{\alpha} \sim \widetilde{x_0}$를 얻는다. 여기에서 $\widetilde{x_0}$는 constant loop이면서 동시에 x_0의 lifting이다.
$\therefore \{\widetilde{\alpha}\} = \{\widetilde{x_0}\} = 1$ □

Remark.
1. $p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ 를 $\pi_1(X, x_0)$ 의 subgroup으로 볼 수 있다.
2. T^2는 S^2의 covering이 될 수 없다 :
$\pi_1(T^2) = \mathbf{Z} \bigoplus \mathbf{Z}$이고 아직 보이지는 않았지만 $\pi_1(S^2) = 0$ 임을 이용하면, T^2는 S^2의 covering이 될 수 없음을 알 수 있다.

정리 2 *Let $p : \widetilde{X} \to X$ be a covering with $p(\widetilde{x_0}) = p(\widetilde{x_0}') = x_0$. Then $p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ and $p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}')$ are conjugate in $\pi_1(X, x_0)$, i.e., $\exists \{\tau\} \in \pi_1(X, x_0)$ such that $\{\tau\} p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \{\tau\}^{-1} = p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}')$*

증명 먼저 $\widetilde{x_0}'$와 $\widetilde{x_0}$사이의 path σ를 잡은 후, 그것을 X로 내린 $\tau := p \circ \sigma$를 생각해 보자. 그리고 다음의 일반적인 diagram을 생각해 보면,

$$\begin{array}{ccc} & \phi_\rho & \\ \pi_1(X, x_0) & \to & \pi_1(X, x_1) \\ f_\sharp \downarrow & & \downarrow f_\sharp \\ \pi_1(Y, f(x_0)) & \to & \pi_1(Y, f(x_1)) \\ & \phi_{f\circ\rho} & \end{array} \qquad \text{key diagram } (*)$$

위 diagram이 commute함을 보이자.
$\{\alpha\} \in \pi_1(X, x_0)$에 대해 $f_\sharp(\phi_\rho(\{\alpha\}) = \phi_{f\circ\rho}(f_\sharp(\{\alpha\}))$ 임을 보여야 하는데
$f_\sharp(\phi_\rho(\{\alpha\}) = f_\sharp(\{\rho * \alpha * \overline{\rho}\}) = \{f \circ (\rho * \alpha * \overline{\rho})\} = \{(f \circ \rho) * (f \circ \alpha) * (f \circ \overline{\rho})\}$
$\phi_{f\circ\rho}(f_\sharp(\{\alpha\})) = \phi_{f\circ\rho}\{f \circ \alpha\} = \{(f \circ \rho) * (f \circ \alpha) * (\overline{f \circ \rho})\}$
이고, $f \circ \overline{\rho} = \overline{f \circ \rho}$ 이므로, 위 diagram은 commute한다.
따라서 이제 정리의 case에 맞는 다음 diagram 도 commute한다.

$$\begin{array}{ccc} & \phi_\sigma & \\ \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) & \to & \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}') \\ p_\sharp \downarrow & & \downarrow p_\sharp \\ \pi_1(X, x_0) & \to & \pi_1(X, x_0) \end{array} \qquad \text{diagram } (*)'$$

ϕ_τ

따라서 위 정리가 증명되었다.

□

Remark.

1 . *If* $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x_0})$ *is a normal subgroup of* $\pi_1(X,x_0)$ *, then* $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x_0}) = p_\sharp\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x_0}')$ *for all* $\widetilde{x_0}' \in p^{-1}(x_0)$.
즉, normality는 $\widetilde{X}$ 의 base point 의 선택에 무관하다. 또한 위 diagram $(*)'$에서 X 의 base point x_0의 선택에도 무관하다. 이 경우 $p : \widetilde{X} \to X$ 를 *regular* covering (or *normal* covering) 이라고 부른다.

2 . 위 정리로부터 *The conjugacy class of a subgroup* $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x_0})$는 $\{p_\sharp\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x_0}') \mid \widetilde{x_0}' \in p^{-1}(x_0)\}$와 같다.