π_1-action on $p^{-1}(x)$

Let G be a group acting on a set X on the left, i.e.,
$\exists\ \alpha : G \times X \to X$ such that (1) $(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$, (2) $e \cdot x = x$,
where e is an identity in G.

Note. α induces a homomorphism : $G \to Perm(X)$.
Orbit of $x = G(x) = G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$,
Isotropy subgroup at $x = G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ 에 대해 다음이 성립한다.
$\exists$ *a bijection* $\phi : G/G_x \to G \cdot x$:
(증명)Define $\psi : G \to G \cdot x$ by $g \mapsto gx$. 이 때, $\psi^{-1}(g \cdot x) = gG_x$임을 보이자.
만일 $h \cdot x = g \cdot x$라면,
$\Leftrightarrow (g^{-1}h)x = x$
$\Leftrightarrow g^{-1}h \in G_x$
$\Leftrightarrow h \in gG_x$.
따라서 ψ는 bijection $\phi : G/G_x \to G \cdot x$ 를 준다.
If the action is *transitive*, i.e., $G \cdot x = X$ for some $x \in X$, then $G/G_x \simeq X$.
(이 때 X를 homogeneous하다 라고 한다.)

Note. $G_{gx} = gG_xg^{-1}$.

$p^{-1}(x_0)$상에 다음과 같이 $\pi_1(X, x_0)$ action을 right action으로 정의하자.
$\widetilde{x_0} \cdot \{\alpha\} := \widetilde{\alpha}_{\widetilde{x_0}}(1)$.
즉, $p^{-1}(x_0)$ 위의 각 점에 대해 α의 $\widetilde{x_0}$에서 시작하는 lifting $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x_0}}$ 의 끝점으로 값을 주면, 이는 action의 조건을 만족한다. 이를 보이기 위해 다음 두가지를 보이자.
(1) $\widetilde{x_0}(\{\alpha\}\{\beta\}) = (\widetilde{x_0}\{\alpha\})\{\beta\}$.
(2) $\widetilde{x_0} \cdot 1 = \widetilde{x_0}$.
(증명)(1)은 당연하고, (2)는 constant loop를 lifting시키면 역시 constant loop로 가는 성질 때문에 성립한다. 따라서 right action이 되고, 이 때 다음 두가지가 성립한다.

1 . π_1-action is transitive.:
$X = p^{-1}(x_0)$에 대해 π_1-action 이 transitive임을 보여야 하므로, 임의의 $\widetilde{x_0}' \in p^{-1}(x_0)$ 에 대해 $\widetilde{x_0} \cdot \alpha = \widetilde{x_0}'$를 만족하는 α가 있음을 보이면 된다.
$\widetilde{X}$는 path connected이므로 $\widetilde{x}_0$에서 $\widetilde{x}'_0$으로 가는 path γ를 잡아 X로 내린 것을 α 라 두자. 이를 다시 lifting시키면, 이는 $\widetilde{x}_0$에서 $\widetilde{x}'_0$으로 가는 path $\widetilde{\alpha} = \gamma$가 된다.

2 . Isotropy subgroup at $\widetilde{x_0} = p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$:

(증명)($\subseteq$)*Isotropy subgroup at* $\widetilde{x_0}$는 $\widetilde{x_0}\{\alpha\} = \widetilde{x_0}$를 만족하는 $\{\alpha\}$들이므로 $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x_0}}(1) = \widetilde{x_0}$를 만족하고 따라서 $\widetilde{\alpha}$는 loop가 된다. $\{\widetilde{\alpha}\} \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ 에서 양변에 $p_\sharp$ 을 취하면 $\{\alpha\} = p_\sharp\{\widetilde{\alpha}\} \in p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ 이 된다.
($\supseteq$) 역으로 $\{\beta\} \in p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$를 잡자. 그러면 어떤 $\{\beta'\} \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$에 대해 $p_\sharp(\{\beta'\}) = \{\beta\}$ 이다. 이 때, β의 lifting을 $\widetilde{\beta}$ 라 두면
$p_\sharp\{\widetilde{\beta}\} = \{p \circ \widetilde{\beta}\} = \{\beta\} = p_\sharp\{\beta'\}$.
따라서 $\beta = p \circ \widetilde{\beta} \sim p \circ \beta'$이므로 $\widetilde{\beta} \sim \beta'$ 이 되고, β'은 loop 이므로 $\widetilde{\beta}$도 loop가 된다. 따라서 $\widetilde{\beta}_{\widetilde{x_0}}(1) = \widetilde{x_0}$ 를 만족한다.

위의 1,2 에 따라 다음 따름정리가 성립한다.

따름정리 1 $p^{-1}(x_0)$은 $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \setminus \pi_1(X, x_0)$ *와 1-1 correspondence 를 가진다.*

따름정리 2 *The cardinality of* p^{-1}*(*$= |p^{-1}(x)|$*) is constant,* $\forall\ x \in X$.

증명 두 개의 다른 $x_0, x_1 \in X$에 대해 p^{-1}의 cardinality가 같음을 보이자. 먼저 두 점의 lifting $\widetilde{x_0}, \widetilde{x_1}$에 대해 그 두점을 잇는 path ρ 가 존재하고, ρ를 내린 것을 $p \circ \rho$ 라 두자. 그러면 다음 diagram 이 commute하고

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) & \xrightarrow{\phi_\rho} & \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_1}) \\ p_\sharp \downarrow & & \downarrow p_\sharp \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow[\phi_{p\circ\rho}]{} & \pi_1(X, x_1) \end{array} \qquad \text{diagram } (*)'$$

따라서 $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \setminus \pi_1(X, x_0)$ 와 $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_1}) \setminus \pi_1(X, x_1)$은 isomorphism $\phi_{p\circ\rho}$에 의해 1-1 correspondence 를 가지는데, 따름정리 1에 의해 좌변은 $p^{-1}(x_0)$와 cardinality 가 같고 우변 역시 마찬가지로 $p^{-1}(x_1)$ 와 cardinality 가 같다. 따라서 $|p^{-1}(x_0)| = |p^{-1}(x_1)|$ 이 성립한다.

□

특히 $|p^{-1}(x)| = n$ 인 경우, $p : \widetilde{X} \to X$ 를 n-sheeted(n-fold) covering 이라고 부른다.

정의 1 *(1) A path connected space X is simply connected if* $\pi_1(X) = 1$.
(2) $p : \widetilde{X} \to X$ *is called a universal covering if* $\widetilde{X}$ *is simply connected.*

위 정의와 따름정리 1 로부터 다음 내용을 알 수 있다.

따름정리 3 *If* $p : \widetilde{X} \to X$ *is a universal covering, then* $|p^{-1}(x)| = |\pi_1(X, x)|$

따름정리 4 *If* X *is simply connected , then* $p : \widetilde{X} \to X$ *is a homeomorphism.*

증명 $\pi_1(X, x)$ 이 trivial이므로 그의 subgroup 인 $p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ 역시 trivial하다. 따라서 $|p^{-1}(x)| = |\pi_1(X, x)| = 1$ 이 되어 p 는 1-1 이 된다. 원래 covering map p 는 onto, continuous, open map이었으므로 p는 homeomorphism 이 된다.

□