General Lifting Theorem

정리 1 *(General lifting theorem)*
Let $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to (X, x_0)$ *be a covering and* Y *be a path-connected and locally path-connected space. Let* $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$*. Then*
$\exists\ \widetilde{f} : (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ *: a lifting of* $f \;\Leftrightarrow\; f_\sharp \pi_1(Y, y_0) \subset p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$.
In this case $\widetilde{f}$ *is unique.*

$$\begin{array}{ccc} & & (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \\ & \exists \widetilde{f} \nearrow & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow[f]{} & (X, x_0) \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad f_\sharp \pi_1(Y, y_0) \subseteq p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$$

증명 $(\Rightarrow)$
$f = p \circ \widetilde{f}$ 이므로 $f_\sharp = p_\sharp \circ \widetilde{f}_\sharp$ 이고 $f_\sharp \pi_1(Y, y_0) = p_\sharp(\widetilde{f}_\sharp \pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$.
$(\Leftarrow)$
임의의 $y \in Y$에 대해 $\widetilde{f}(y)$를 다음과 같이 정의하자. y_0와 y 사이의 path ρ 를 잡은 후 $f \circ \rho$의 $\widetilde{x_0}$에서 시작하는 lifting $\widetilde{f \circ \rho}$ 에 대해 $\widetilde{f}(y) = \widetilde{f \circ \rho}(1)$ 로 정의하면 이것이 바로 원하는 $\widetilde{f}$ 가 된다.
먼저 $\widetilde{f}$ 가 잘 정의되었는지를 보이자. 즉, y_0와 y사이의 path의 선택에 무관함을 보이기 위해, σ를 또다른 path로 두자. 그러면, $f \circ \rho * \overline{f \circ \sigma}$는 loop가 되고 가정에 의해 $\{f \circ \rho * \overline{f \circ \sigma}\} = f_\sharp\{\rho * \overline{\sigma}\} \in p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ 이다.
따라서 $f \circ \rho * \overline{f \circ \sigma}$의 lifting은 loop이고, $\widetilde{f \circ \sigma}(1) = \widetilde{f \circ \rho}(1)$ 이 되므로 $\widetilde{f}$는 잘 정의되었음을 알 수 있다.

다음으로 $\widetilde{f}$가 연속임을 보이자. $\widetilde{f}$가 연속임을 보이기 위해 $\forall y \in Y$ 에 대해 어떤 근방 W_y가 있어서 $\widetilde{f}|_{W_y}$가 연속이라는 것을 보이면 충분하다. $x = f(y)$에 대해 evenly cover되는 근방을 U_x라 두면 f가 연속이고 Y가 locally path connected이므로 $f(W_y) \subset U_x$를 만족하는 path connected W_y가 존재한다. 그러면 $\forall z \in W_y$ 는 y로부터 W_y안에서 path τ_z로 연결할 수 있고, $\rho * \tau_z$는 y_0로부터 z까지의 path를 준다. 따라서 $\widetilde{f}(z) = \widetilde{f \circ (\rho * \tau_z)}(1) = \widetilde{f \circ \rho * f \circ \tau_z}(1) = \widetilde{f \circ \tau_z}(1)$이 되고 이 때 $\widetilde{f \circ \tau_z}$는 $\widetilde{f}(y)$ 에서 시작하는 lifting이다. 즉 W_y안의 임의의 점 z를 y_0와의 path의 끝점으로 보고 이 path에서 y와 z를 잇는 부분을 f로 보낸 것은 U_x에 들어감을 이용해서 U_x에서의 V_a와의 homeomorphsim p^{-1}를 쓰자.
$p^{-1}(U_x) = \coprod_{a \in A} V_a$ and $\widetilde{f}(y) \in V_a$ 이라고 두면 V_a에서 p^{-1}는 homeomorphism이므로 τ_z를 이용해서 $\widetilde{f}|_{W_y} = p|_{V_a}^{-1} \circ f|_{W_y}$ 임을 알 수 있고, 또 $\widetilde{f}$는 path의 선

택에 무관하다는 사실로부터 그렇게 될 수 밖에 없다. 따라서 $\widetilde{f}|_{W_y}$ 는 연속이다.
마지막으로 uniqueness 는 Y가 connected이므로 이전의 증명과 같다.

$\square$

Remark. This is a generalization of *Unique path lifting property* and *Lifting of path homotopy theorem* and *Covering homotopy property.*

참고로 *Unique path lifting property*는 Y가 I인 경우이고, *Lifting of path homotopy theorem*는 Y가 $I \times I$ 인 경우이다. 그것을 더 일반화해서 $I \times I$를 $Y \times I$로 본 경우가 *Covering homotopy property*이다.

Covering homotopy property :
covering $p : \widetilde{X} \to X$에 대해 $f : Y \to X$의 lifting $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$가 주어졌다고 하자. f가 $g : Y \to X$ 와 homotopy $F : Y \times I \to X(F|_{Y\times\{0\}} = f)$ 에 의해 homotopic하다고 할 때 이 homotopy F를 다음 $\widetilde{F}$ 로 lifting 시킬 수 있다.
$\widetilde{F} : Y \times I \to \widetilde{X}$, $\widetilde{F}|_{Y\times\{0\}} = \widetilde{f}$.

숙제 8. $X = M^2$ *with triangulation* $T \Rightarrow$ T *induces a triangulation* $\widetilde{T}$ *on* $\widetilde{X}$.

숙제 9. 일반적으로 closed surface 들의 n-fold covering을 classify하라.