Morphisms of Covering Space

정의 1 *Let $p_i : \widetilde{X}_i \to X, i = 1, 2$ be covering maps.*
A morphism of $\widetilde{X}_1$ to $\widetilde{X}_2$ is a map $\phi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ such that the diagram

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_1 \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

commutes.

즉, 위 diagram 이 commute한다는 말은 fiber를 fiber로 보낸다는 뜻이 된다. 위와 같이 morphism을 정의했을 때 1-1,onto인 morphism 을 isomorphism이라고 하고, 특히 자기자신으로 가는 isomorphism을 deck transformation (or covering transformation) 이라고 한다.
deck transformation의 예로 covering $p : \mathbf{R}^1 \to S^1$ 에서
$\tau : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\tau(x) = x + 1$를 생각해 보자.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R} \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbf{R} \arrow[dl, "p"] \\ & S^1 & \end{tikzcd}$$

그러면, τ를 취하기 전의 x를 p로 보낸 것이나 τ를 취한 후 p로 보낸 것이나 같음을 알 수 있다. 즉, $p \circ \tau = p$ 이므로 τ는 deck transformation이 된다.
또 다른 예로 $p : S^n \to P^n$ 에서 각 $[x]$의 p^{-1}이미지인 $x, -x$ 를 바꾸는 map, 즉 antipodal map A를 생각해보자. 위와 마찬가지로 $p(A(x)) = p(-x) = p(x)$ 이므로 A도 deck transformation이 된다.

정리 1 *Let $p_i : \widetilde{X}_i \to X, i = 1, 2$ be covering maps. Then*
(1) $\exists$ a morphism $\phi : (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2) \Leftrightarrow p_{1\sharp}\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \subset p_{2\sharp}\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)$.
Such a morphism is unique if it exists.
(2) A morphism ϕ is a covering map.

증명

(1)의 증명은 이전에 했던 general lifting theorem 에서와 같고, uniqueness 역시 이전에 했던 것과 마찬가지이다.

(2)의 증명은 ϕ가 onto이고 evenly cover되는 근방을 가진다는 것을 보이면 된다.

먼저 ϕ가 onto임을 보이기 위해 임의의 $y \in \widetilde{X}_2$에 대해 $\widetilde{x}_2$에서 y 로 가는 path ρ를 잡자. 이 ρ 를 p_2 에 의해 X로 내린 후 $\widetilde{X}_1$으로 lifting을 시킨 것을 $\widetilde{p_2 \circ \rho}$라 두자.그러면 ϕ가 morphism이라는 사실로부터 $\phi(\widetilde{p_2 \circ \rho})$는 $\widetilde{X}_2$에서의 $p_2 \circ \rho$ 의 lifting이 된다. 그런데, ρ 역시 $\widetilde{X}_2$에서의 $p_2 \circ \rho$ 의 lifting이므로 uniqueness에 의해 둘은 같다. 즉, $\phi(\widetilde{p_2 \circ \rho}) = \rho$ 이므로, 끝점도 같다. 따라서 ϕ는 onto 이다.

다음으로, ϕ가 evenly cover되는 근방을 가짐을 보이자.

임의의 $y \in \widetilde{X}_2$에 대해 $p_2(y) = z \in X$ 를 생각해보자. 이 z에서 covering p_1에 대해 evenly cover되는 U_1과 p_2에 대해 evenly cover되는 U_2가 존재한다. 이 둘의 교집합에 포함되는 path connected한 neighborhood를 U로 두자. 그러면 $p_1^{-1}(U) = \coprod_{a \in p_1^{-1}(z)} V_a$, $p_2^{-1}(U) = \coprod_{b \in p_2^{-1}(z)} W_b$ 로 둘 수 있다. 특히 y를 포함하는 $\widetilde{X_2}$에서의 copy를 W_y라 두자. 각 V_a에서는($a \in p_1^{-1}(z)$) p_1은 homeomorphism이고, 또 U와 W_y에서는 p_2가 homeomorphism 이므로 $\phi|_{V_a} = p_2|_U^{-1} \circ p_1|_{V_a}$ 이 되어야 한다. ($p_1|_{V_a}$의 lifting의 uniqueness에 의해)그러면 이 W_y는 다음에 의해 evenly covered 된다.

$\coprod_{a \in \phi^{-1}(y)} V_a = \phi^{-1}(W_y)$.

$\square$

따름정리 2 *Let* $p : \widetilde{X} \to X$ *be a universal covering and* $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ *be a covering. Then* $\exists$ *a covering* $\phi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}_1$ *such that* $p_1 \circ \phi = p$

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\phi} & \widetilde{X}_1 \\ & p \searrow \quad \swarrow p_1 & \\ & X & \end{array}$$

위 따름정리에 따르면, X의 universal covering $\widetilde{X}$ 가 있기만 하면 모든 다른 covering은 $\widetilde{X}$에 의해 covered 된다는 것을 알 수 있다.

예. 다음은 모두 universal covering 들이다.

1 . $p : \mathbf{R} \to S^1$.

2 . $p : S^n \to p^n$, $(n \geq 2)$.

3 . $p : \mathbf{R}^n \to T^n$.

정리 3 *(Existence and Uniqueness.)*
Let $p_i : \widetilde{X}_i \to X, i = 1, 2$ *be covering maps. Then*
$\exists$ *an isomorphism* $\phi : (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2) \Longleftrightarrow p_{1\sharp}\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) = p_{2\sharp}\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)$

증명 앞 Section의 정리 1에서 한쪽방향을 보였으므로 양쪽에 대해 생각하면 된다. □

위 정리에서 base point 와 무관하게 다음 내용이 성립함을 알 수 있다.

따름정리 4

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}_1 & \xrightarrow{\exists\phi} & \widetilde{X}_2 \\ & p_1 \searrow \quad \swarrow p_2 & \\ & X & \end{array} \quad , \phi : isomorphism.$$

$\Leftrightarrow$ *For some* $x = p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2)$, $p_{1\sharp}\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)$ *and* $p_{2\sharp}\pi_2(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)$ *belong to the same conjugacy class in* $\pi_1(X, x)$.

증명 이전의 Application부분에서 $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ 와 $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}'_0)$ 사이에는 conjugation 관계가 있음을 보였으므로 이로부터 보일 수 있다. □

숙제 10. Massey, "Algebraic topology : An introduction", p. 161, exc 6.4,

숙제 11. Massey, "Algebraic topology : An introduction", p. 161, exc 6.5.