Deck transformation

G를 covering $p : \widetilde{X} \to X$의 deck transformation group 이라고 두자. 이 때 다음 두 가지가 성립한다.

1. G acts on $\widetilde{X}$ on the *left*.

$g : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$

$x \mapsto g \cdot x = g(x)$ and $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

2. And the action is *free*, i.e., $\forall g \neq 1$, $g(\widetilde{x}) \neq \widetilde{x}$,$\forall \widetilde{x} \in X$.

(Or equivalently, $G_{\widetilde{x}} = \{1\}$, $\forall \widetilde{x} \in X$.)

증명

$$\begin{array}{ccc} & g & \\ (\widetilde{X}, \widetilde{x}) & \rightarrow & (\widetilde{X}, \widetilde{x}) \\ p \searrow & & \swarrow p \\ & (X, x) & \end{array}$$

위 diagram 에서 g를 p의 lifting(즉 morphism)으로 볼 수 있고, id map도 $\widetilde{x}$를 $\widetilde{x}$로 보내는 morphism이므로 *Uniqueness of morphism(lifting)* 에 의해 $g = id$ 가 된다. $\square$

Note.(*Uniqueness*) 이 사실로부터 두개의 deck transformation g와 h 가 한 point x에서 일치하면, g와 h는 map으로서 완전히 같아야 한다는 것을 알 수 있다.

G action on $\widetilde{X}$는 G action on $p^{-1}(x)$ 을 주고 이것 역시 free이다. 그런데 앞에서 생각했던 right action of $\pi_1(X, x)$ on $p^{-1}(x)$를 다시 보자. 그러면

명제 1 *Two actions commute, i.e.,* $g(\widetilde{x}\cdot\{\alpha\}) = g(\widetilde{x})\cdot\{\alpha\}$ *for* $\forall\ \widetilde{x}$, $\forall\ \{\alpha\}$, $\forall\ g$.

증명 *그림*

$p \circ (g \circ \widetilde{\alpha}) = p \circ \widetilde{\alpha}$ 이므로 $g \circ \widetilde{\alpha}$는 $(g \circ \widetilde{\alpha})(0) = g(\widetilde{x})$에서 $(g \circ \widetilde{\alpha})(1) = g(\widetilde{x} \cdot \{\alpha\})$로 가는 α의 lifting 이 된다. 그런데 $g(\widetilde{x}) \cdot \{\alpha\} = (g \circ \widetilde{\alpha})(1)$ 이므로 $g(\widetilde{x} \cdot \{\alpha\}) =$

$g(\widetilde{x}) \cdot \{\alpha\}$이 된다. □

명제 2 *Let* $p : \widetilde{X} \to X$ *be a covering and* $\widetilde{x}, \widetilde{x}' \in p^{-1}(x)$. *Then*
$\exists g \in G$ *such that* $g(\widetilde{x}) = \widetilde{x}'$
$\Leftrightarrow p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) = p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}')$
$\Leftrightarrow \widetilde{x}' = \widetilde{x} \cdot \{\alpha\}$, $\{\alpha\} \in N(p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$.
여기서 $\pi_1(X, x)$*의 subgroup* H*에 대해,* $N(H)$*는* H*의 normalizer이다.*

증명

첫번째 equivalence는 앞에서 보인 적이 있고, 두번째 equivalence를 증명하자.
($\Rightarrow$) 일반적으로 x와 x'를 잇는 path 를 ρ라 할 때 $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ 와 $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}')$ 사이에 isomorphism ϕ_ρ 가 존재한다. 이 ρ 를 내리면 $\pi_1(X, x)$상에서 loop 가 되고 이 loop $p \circ \rho$를 α라 두자. 그러면 $\{\alpha\} \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ with $\widetilde{x}' = \widetilde{x} \cdot \{\alpha\}$ 에 대해 $\{\alpha\} p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}') \{\alpha\}^{-1} = p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ 이다. 그런데 $p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) = p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}')$ 이므로 $\{\alpha\} p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \{\alpha\}^{-1} = p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ 이 되어 $\{\alpha\} \in N(p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ 이 된다.

($\Leftarrow$) $\{\alpha\} \in N(p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ 이면
$p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}') = \{\alpha\}^{-1} p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \{\alpha\} = p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ 이므로
$p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) = p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}')$.

□

위 명제에서 다음 ϕ 를 생각해 보자.

$$\begin{aligned} \phi : N(p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) &\to G \ , \quad g_\alpha(\widetilde{x}) = \widetilde{x}' = \widetilde{x} \cdot \{\alpha\}. \\ \{\alpha\} &\mapsto g_\alpha \end{aligned}$$

1. ϕ is a homomorphism.

(증명) $g_{\alpha\beta} = g_\alpha \circ g_\beta$ 를 보이자.
π_1 action과 deck transformation group G action이 commute 하므로
$g_\alpha(\widetilde{x} \cdot \{\beta\}) = g_\alpha(\widetilde{x}) \cdot \{\beta\} = (\widetilde{x} \cdot \{\alpha\}) \cdot \{\beta\} = \widetilde{x} \cdot (\{\alpha\}\{\beta\}) = g_{\alpha\beta}(\widetilde{x})$.
따라서 앞 Note에서 언급한 deck transformation의 uniqueness에 의해 $g_{\alpha\beta} = g_\alpha \circ g_\beta$ 이다.

2. ϕ **is onto.**
(증명)임의의 주어진 $g \in G$에 대해 $\widetilde{x}' = g(\widetilde{x})$라 두자. 그리고 ρ를 $\widetilde{x}$에서 $\widetilde{x}'$ 로 가는 path라 두자. 그러면 loop $\alpha = p \circ \rho$에 대해 명제 2에 의해 $\widetilde{x}' = x \cdot \{\alpha\}$,$\{\alpha\} \in N(p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$이 된다.
3. $ker\ \phi = p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$**.**
(증명)만일 $\phi(\{\alpha\}) = id$ 라면 $g_\alpha = id$ 이고,
$\widetilde{x} \cdot \{\alpha\} = g_\alpha(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$ 이므로 $\{\alpha\} \in p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$이다. 역으로 $\{\alpha\} \in p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$이면 $g_\alpha(\widetilde{x}) = \widetilde{x} \cdot \{\alpha\} = \widetilde{x}$이고 uniqueness에 의해 $g_\alpha = id$이다.

위의 1,2,3 에 의해 다음 따름정리가 얻어진다.

따름정리 3 $G \cong N(p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) \diagup p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$.

HW. 위 ϕ로 부터 induce된 isomorphism $\theta : N(p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) \diagup p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to G$는 base point $\widetilde{x}$에 depend한다. base point가 달라질 때 어떻게 달라지는지 비교하라.

특히 $p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ 가 $\pi_1(X, x)$ 의 normal subgroup인 경우, 다음이 성립한다.

따름정리 4 *Let* $p : \widetilde{X} \to X$ *be a regular covering. Then* $G \cong \pi_1(X, x) \diagup p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$*.* *그리고 이것은* $p^{-1}(x)$*와 1-1 correspondence 를 가진다.*

(증명) π_1-action 의 따름정리 1에서 1-1 correspondence 가 있음을 보였다.

따름정리 5 *Let* $p : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ *be a universal covering. Then* $G \cong \pi_1(X, x)$*.*

증명 $\widetilde{X}$가 simply connected 이므로 $\pi_1(\widetilde{X}) = 1$ 이 된다. 따라서 $p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) = 1$ 이 되고, 이는 당연히 $\pi_1(X, x)$의 normal subgroup이 되므로

$$\begin{aligned} G &\cong N(p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) \diagup p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \\ &= \pi_1(X, x) \diagup p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \\ &= \pi_1(X, x). \end{aligned}$$

□

Q. g_α는 실제 어떠한 map인가?

따름정리 6 *$p : \widetilde{X} \to X$ is a regular covering $\Leftrightarrow$ G action on $p^{-1}(x)$ is transitive.*

증명 ($\Rightarrow$)어떤 $\widetilde{x}$에 대해 $G \cdot \widetilde{x} = p^{-1}(x)$ 를 만족함을 보이면 된다.
p가 regular covering이면 $N(p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) = \pi_1(X, x)$이므로 임의의 $\widetilde{x}' \in p^{-1}(x)$에 대해 $\widetilde{x}$에서 $\widetilde{x}'$로 가는 path ρ를 잡아 $\alpha = p \circ \rho$ 라 두면 명제 2의 두번째 equivalence에 의해 $g \cdot \widetilde{x} = \widetilde{x}'$ 를 만족하는 $g \in G$ 가 존재한다.
($\Leftarrow$) G action on $p^{-1}(x)$ is transitive하므로 임의의 $\widetilde{x}$에 대해 $G \cdot \widetilde{x} = p^{-1}(x)$ 를 만족한다. 임의의 $\{\alpha\} \in \pi_1(X, x)$에 대해 $\widetilde{x}' = \widetilde{x} \cdot \{\alpha\}$라 두면 transitivity에 의해 $g(\widetilde{x}) = \widetilde{x}'$를 만족하는 g가 존재한다. 따라서 명제 2의 두번째 equivalence에 의해 $\{\alpha\} \in N(p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ 이다. 다시 말해 $\pi_1(X, x) = N(p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$이고 $p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$는 normal subgroup 이다.

□

HW. "Figure eight"의 regular covering과 non-regular covering을 construct하라.