Applications

정리 1 *If $n > 1$, then $\pi_1(S^n) = 0$.*

증명 $f : (D^n, \partial D) \longrightarrow (S^n, x)$를 ∂D를 한 점 $x \in S^n$로 보내는 quotient map이라 하자. $\pi_1(D^n) = 0$이므로, f는 map $\tilde{f} : D^n \longrightarrow \widetilde{S^n}$로 lift될 수 있다. 단, 여기에서 $\widetilde{S^n}$는 S^n의 universal covering space이다. (universal covering space의 존재성은 이전 강의note 참조.)

$$\begin{tikzcd}
 & (\widetilde{S^n}, \tilde{x}) \arrow[dd, "p"] \\
(D^n, \partial D) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & \\
 & (S^n, x)
\end{tikzcd}$$

이 때, ∂D는 connected이고, $\tilde{f}$는 continuous이므로, $\tilde{f}(\partial D)$ 또한 connected space이다. 그런데, $f(\partial D) = \{x\}$이므로, $\tilde{f}(\partial D)$는 한 점 집합일 수 밖에 없다. 즉, $\{\tilde{x}\}$이다.

한편, f가 quotient map이므로, $\tilde{f}$로부터 induce된 continuous map $\bar{f} : S^n \longrightarrow \widetilde{S^n}$가 존재한다. 따라서 다음 $p\tilde{f} = f$과 $\tilde{f} = \bar{f}f$이 성립하고, 이로부터 $f = p\tilde{f} = p\bar{f}f$를 얻는다. 따라서 $p\bar{f} = id_{S^n}$이다.

$\widetilde{S^n}$가 S^n의 universal covering space이므로, $\pi_1(\widetilde{S^n}, \tilde{x}) = 0$이고, 따라서 $id = id_\sharp = 0$이다. (아래 다이어그램 참조) 따라서, $\pi_1(S^n, x) = 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(\widetilde{S^n}, \tilde{x}) = 0 \arrow[dd, "p_\sharp"] \\
\pi_1(S^n, x) \arrow[ur, "\bar{f}_\sharp"] \arrow[dr, "id_\sharp = id"'] & \\
 & \pi_1(S^n, x)
\end{tikzcd}$$

□

따름정리 2 *If $n \geq 2$, then $\pi_1(P^n) = \mathbb{Z}/2$.*

증명 Let $p : S^n \longrightarrow P^n$ be a 2-fold covering map. (Consider a covering map that maps x and $-x$ to the same point.) By the preceding theorem, we see that $\pi_1(S^n) = 0$. So,

$$|\pi_1(P^n)| = |\pi_1(P^n)/p_\sharp \pi_1(S^n)| = |p^{-1}(x)| = 2$$

But we know that there is only one group of order 2 up to isomorphism, namely, $\mathbb{Z}/2$. So we have $\pi_1(P^n) = \mathbb{Z}/2$. □

정리 3 *There is no "antipode preserving" map $f : S^2 \longrightarrow S^1$, i.e., there is no such map satisfying $f(-x) = -f(x)$ for every x.*

증명 "Antipode preserving" map $f : S^2 \longrightarrow S^1$가 존재한다고 가정하자. 그러면, f는 다음 다이어그램을 commute하게 하는 함수 $\bar{f} : P^2 \longrightarrow P^1$를 induce한다.

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ P^2 & \xrightarrow[\bar{f}]{} & P^1 \end{array}$$

S^2-상에서 한 고정점 x와 그의 antipode $-x$를 잇는 path ϕ를 생각하여 보자. f가 antipode preserving이므로, $f\phi$는 S^1-상의 path로서, $f(x)$와 $-f(x)$를 잇는 것이고, 따라서 이를 p에 의하여 내려보았을 때, $\{pf\phi\}$는 $\pi_1(P^1, [f(x)])$의 한 nontrivial element가 된다. 그런데 ϕ를 p에 의해 바로 내려 보면, 이는 $\pi_1(P^2, [x])$의 한 generator(nontrivial)임을 알 수 있다. 이상을 정리하면, f가 antipode preserving이므로, $\bar{f}_\sharp : \pi_1(P^2) \longrightarrow \pi_1(P^1)$은 한 generator를 nontrivial element로 보내고 있음을 알 수 있다. 그런데, $\pi_1(P^2) = \mathbb{Z}/2$이고, $\pi_1(P^1) = \mathbb{Z}$이므로, 이는 불가능하다. □

정리 4 *(* Borsuk-Ulam *Theorem) Let $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Then there exists $x \in S^2$ such that $f(x) = f(-x)$.*

증명 그렇지 않다고 가정하자. 그러면, 우리는 새로운 함수 $g : S^2 \longrightarrow S^1$을 다음

$$g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{||f(x) - f(-x)||}$$

과 같이 잘 정의할 수 있다. 그런데, $g(-x) = -g(x)$이므로, g는 antipode preserving map이 되고, 위의 정리에 모순이다. $\square$