The Induced Covering Over a Subspace

이 note 전체에 걸쳐, $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$를 covering map이라 하고, A를 X의 subspace라 가정한다. 이 때, $\widetilde{A}$는 $p^{-1}(A)$의 한 path component를 나타낸다고 하자. 또한, $i : A \longrightarrow X$를 inclusion map으로 고정한다.

명제 1 *Let A be a path-connected and locally path-connected subspace of X, and let $\widetilde{A}$ be a path-component of $p^{-1}(A)$. Then $p|_{\widetilde{A}} : \widetilde{A} \longrightarrow A$ is a covering map, and $p_\sharp \pi_1(\widetilde{A}, \tilde{a}) = i_\sharp^{-1}(p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{a}))$.*

증명

1. **숙제** $p|_{\widetilde{A}} : \widetilde{A} \longrightarrow A$가 covering map이 됨을 증명하시오.

2. 우선, $p_\sharp \pi_1(\widetilde{A}, \tilde{a}) \subset i_\sharp^{-1}(p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{a}))$임을 보이자. 다음 다이어그램

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{A}, \tilde{a}) & \xrightarrow{i} & (\widetilde{X}, \tilde{a}) \\ {\scriptstyle p|}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ (A, a) & \xrightarrow[i]{} & (X, a) \end{array}$$

   이 commute하므로, functor를 모두 작용하여 보면, $i_\sharp p_\sharp \pi_1(\widetilde{A}, \tilde{a}) = p_\sharp i_\sharp \pi_1(\widetilde{A}, \tilde{a})$임을 알 수 있다. 그런데, $i_\sharp \pi_1(\widetilde{A}, \tilde{a}) \subset \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{a})$이므로, $i_\sharp p_\sharp \pi_1(\widetilde{A}, \tilde{a}) \subset p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{a})$이다. 그러므로, $p_\sharp \pi_1(\widetilde{A}, \tilde{a}) \subset i_\sharp^{-1}(p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{a}))$를 얻는다.

3. 이번에는 반대 방향, 즉, $p_\sharp \pi_1(\widetilde{A}, \tilde{a}) \supset i_\sharp^{-1}(p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{a}))$임을 보이자. $\{\alpha\} \in i_\sharp^{-1}(p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{a}))$라 하자. 그러면 $i_\sharp\{\alpha\} \in p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{a})$이고, 따라서, $i_\sharp\{\alpha\} = p_\sharp\{\tilde{\beta}\}$ for some $\{\tilde{\beta}\} \in \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{a})$. 이 때, $i_\sharp\{\alpha\} = \{i \circ \alpha\} = \{\alpha\}$ in $\pi_1(X, a)$이고, $p_\sharp\{\tilde{\beta}\} = \{p \circ \tilde{\beta}\} =: \{\beta\}$이다. 그러므로 "$\alpha \sim \beta$" 이고, 따라서 $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = \tilde{a}$가 되어, $\{\tilde{\alpha}\} \in \pi_1(\widetilde{A}, \tilde{a})$임을 알 수 있다. 따라서 우리는 원하는 대로, $\{\alpha\} = \{p \circ \tilde{\alpha}\} = p_\sharp\{\tilde{\alpha}\} \in p_\sharp \pi_1(\widetilde{A}, \tilde{a})$를 얻는다.

$\square$

따름정리 2 *Let* $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ *be a universal covering, and let* A *be a subspace of* X*. (As usual,* A *is assumed to be path-connected and locally path-connected.) Let* $\widetilde{A}$ *be a path component of* $p^{-1}(A)$*. Then,* $p_\sharp \pi_1(\widetilde{A}, \tilde{a}) = \ker i_\sharp$*, and hence* $p : \widetilde{A} \longrightarrow A$ *is a universal covering if and only if* $i_\sharp$ *is injective.*

명제 3 $p^{-1}(A) = \widetilde{A}$ *if and only if* $i_\sharp \pi_1(A, a)$ *meets every coset of the subgroup* $p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{a})$ *in* $\pi_1(X, a)$*.*

증명 우리의 첫 번째 주장은, $p^{-1}(A) = \widetilde{A}$일 필요충분조건이 $p^{-1}(a) = p|_{\widetilde{A}}^{-1}(a)$라는 것이다. 우선 $\Longrightarrow$ 방향은 자명하다. 반대 방향을 보이기 위하여, $x \in p^{-1}(A)$라 하자. 그러면 $p(x) \in A$이고, $p(x)$부터 a까지를 잇는 A-위의 path ρ를 하나 선택한다. 이를 lifting하여, $\tilde{\rho}(0) = x$인 path $\tilde{\rho}$를 얻으면, 그 끝점 $\tilde{\rho}(1)$은 $p^{-1}(a)$에 들어가고, $p^{-1}(a) = p|_{\widetilde{A}}^{-1}(a)$이므로, 결국 $\widetilde{A}$에 들어가게 된다. 따라서, x도 같은 path component에 있어야 하므로, $x \in \widetilde{A}$이다.
따라서, 우리는 $i : p|_{\widetilde{A}}^{-1}(a) \longrightarrow p^{-1}(a)$가 onto map임을 보이면 된다.
우선, 일반적으로 (G, X)가 group action이라 하자. 각 $x \in X$에 대하여, $ev_x : G \longrightarrow X$를 $ev_x(g) = g \cdot x$로 정의하자. 그러면 다음 다이어그램

$$\begin{array}{ccc} & ev_x & \\ & G \longrightarrow G \cdot x & \\ can. \downarrow & \nearrow\cong & \\ & G/G_x & \end{array}$$

이 commute하므로, 특별히 다음 두 diagram도 모두 commute한다.

$$\begin{array}{ccc} & ev & \\ & \pi_1(A, a) \longrightarrow p|_{\widetilde{A}}^{-1}(a) & \\ can. \downarrow & \nearrow\cong & \\ & \pi_1(A)/p_\sharp \pi_1(\widetilde{A}) & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & ev & \\ & \pi_1(X, a) \longrightarrow p^{-1}(a) & \\ can. \downarrow & \nearrow\cong & \\ & \pi_1(X)/p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}) & \end{array}$$

또한, 다음 다이어그램

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{a}) & \xrightarrow{p_\sharp} & \pi_1(X, a) \\ {\scriptstyle i_\sharp}\uparrow & & {\scriptstyle i_\sharp}\uparrow \\ \pi_1(\widetilde{A}, \tilde{a}) & \xrightarrow{p_\sharp} & \pi_1(A, a) \end{array}$$

이 commute하므로, $i_\sharp : \pi_1(A,a) \longrightarrow \pi_1(X,a)$가 induce하는 map $\bar{\imath}_\sharp : \pi_1(A)/p_\sharp\pi_1(\widetilde{A}) \longrightarrow \pi_1(X)/p_\sharp\pi_1(\widetilde{X})$에 대하여, 다음 다이어그램도 commute한다.

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(X,a) & \xrightarrow{can.} & \pi_1(X)/p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}) \\
{\scriptstyle i_\sharp}\Big\uparrow & & {\scriptstyle \bar{\imath}_\sharp}\Big\uparrow \\
\pi_1(A,a) & \xrightarrow{can.} & \pi_1(A)/p_\sharp\pi_1(\widetilde{A})
\end{array}$$

마지막으로, 다이어그램

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(X,a) & \xrightarrow{ev} & p^{-1}(a) \\
{\scriptstyle i_\sharp}\Big\uparrow & & {\scriptstyle i}\Big\uparrow \\
\pi_1(A,a) & \xrightarrow{ev} & p|_{\widetilde{A}}^{-1}(a)
\end{array}$$

이 commute하는 것은 자명하다.
이상을 종합하면,

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(X)/p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}) & \xrightarrow{\cong} & p^{-1}(a) \\
{\scriptstyle \bar{\imath}_\sharp}\Big\uparrow & & {\scriptstyle i}\Big\uparrow \\
\pi_1(A)/p_\sharp\pi_1(\widetilde{A}) & \xrightarrow{\cong} & p|_{\widetilde{A}}^{-1}(a)
\end{array}$$

가 commute함을 얻어낼 수 있고, 따라서 i가 onto인 것과 $\bar{\imath}_\sharp$이 onto인 것은 동치가 된다. 이것은 곧 $i_\sharp\pi_1(A,a)$가 $\pi_1(X,a)$안의 모든 $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X},\tilde{a})$의 coset과 만난다는 것과 동치이다. □

따름정리 4 *If $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ is a universal covering, then*

1. *$p^{-1}(A)$ is path-connected if and only if $i_\sharp : \pi_1(A,a) \longrightarrow \pi_1(X,a)$ is onto.*
2. *$p : p^{-1}(A) \longrightarrow A$ is a universal covering if and only if $i_\sharp$ is an isomorphism.*