

Simplicial complex in \mathbb{R}^N

정의 1 $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbf{R}^N$ is geometrically independent (or affinely independent) if $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ are linearly independent.

Note. geometrically independent $\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$ with $\sum_{i=0}^n t_i = 0 \Rightarrow t_0 = \dots = t_n = 0$.

Affine independence is a notion in affine space, i.e., invariant under affine transformations.

정의 2 (*n-simplex*)

$\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbf{R}^N$ 가 geometrically independent 하다고 하자.

$$\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^n t_i a_i, t_i \geq 0 \text{ and } \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

= *n-simplex* spanned by $\{a_0, \dots, a_n\}$.

= convex hull of $\{a_0, \dots, a_n\}$

(1) $t_i = t_i(x)$ for $x \in \sigma$ is uniquely determined and called a *barycentric coordinate* of x , and t_i is a continuous function of $x \in \sigma$.

(2) a_i = vertex of σ , $n = \dim \sigma$ 일 때 a simplex spanned by a subset of $\{a_0, \dots, a_n\}$ is called a *face* of σ .

$$\overset{\circ}{\sigma} := \text{int}(\sigma) = \{x \in \sigma \mid t_i(x) > 0, i = 0, \dots, n\}.$$

$$\partial\sigma := \text{boundary of } \sigma = \sigma - \overset{\circ}{\sigma} = \{x \in \sigma \mid t_i(x) = 0, \text{ for some } i\}$$

(3) $\forall x \in \sigma, \exists!$ face τ of σ (denoted by $\tau < \sigma$) such that $x \in \overset{\circ}{\tau}$:

$$\tau = \langle a_{i_0}, \dots, a_{i_k} \mid t_{i_j}(x) > 0, j = 0, \dots, k \rangle$$

정의 3 (*Simplicial complex*)

A simplicial complex K in \mathbf{R}^N is a collection of simplices in \mathbf{R}^N such that

(1) $\tau < \sigma, \sigma \in K \Rightarrow \tau \in K$, and

(2) $\sigma, \tau \in K \Rightarrow \sigma \cap \tau < \sigma$ and $\sigma \cap \tau < \tau$.

정의 4 (*Subcomplex, Dimension, p-skeleton*)

(1) $L \subset K$ is a subcomplex (denoted by $L < K$) if L is a simplicial complex in its own right.

(2) $\dim K := \max\{\dim \sigma \mid \sigma \in K\}$.

(3) p -skeleton of $K := K^p$ = the subcomplex consisting of all simplices of K of $\dim \leq p$.

주어진 simplicial complex K 에 대해 $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subset \mathbf{R}^N$ 를 생각해보자. $|K|$ 에 topology를 다음과 같이 준다.

Topology of $|K|$:

(1) each of σ has the usual induced subspace topology in \mathbf{R}^N .

(2) $A \subset |K|$ is closed (open, respectively) if $A \cap \sigma$ is closed (open, respectively) in $\sigma, \forall \sigma \in K$.

$|K|$ 의 closed set을 (2)와 같이 정의하면 이는 $|K|$ 에 topology 구조를 주고 이를 weak (or coherent) topology 라고 부른다. 또한 $|K|$ with a weak topology 를 K 의 underlying space (or a polytope) 라고 한다.

숙제 12. 일반적으로 어떤 집합 X 에서 $S_\alpha \subset X, \forall \alpha$ 이고 각 S_α 는 topological spaces일 때, 다음 조건을 만족한다고 하자.

1. $S_\alpha \cap S_\beta$ is open (closed, respectively) in S_α and $S_\beta, \forall \alpha, \beta$

2. topology on $S_\alpha \cap S_\beta$ induced from S_α = topology on $S_\alpha \cap S_\beta$ induced from S_β 이 때 $X = \bigcup_{\alpha} S_\alpha$ 에 다음과 같이 topology를 줄 수 있다.

$A \subset X$ is open (closed, respectively) if $A \cap S_\alpha$ is open (closed, respectively) in each S_α .

그러면 이런 A 들은 X 상에 topology를 잘 정의하게 되고 이는 다음을 만족한다.

the subspace topology of S_α as a subspace of X = the original topology of S_α .

이 topology를 $\{S_\alpha\}$ 에 의해 induced된 weak or coherent topology라고 부른다. 그리고 X 가 polytope 과 homeomorphic 할 때 X 를 polyhedron이라고 한다.

Note. The weak topology of $|K|$ is finer than the subspace topology of $|K| \subset \mathbf{R}^N$, i.e., $id : |K|_w \rightarrow |K|_s$ is continuous.

(증명) $A \subset |K|$ 가 closed in $|K|_s$ 이면 A 는 subspace topology 로 closed이고 $A \cap \sigma$ 는 σ 에서 closed이다. 따라서 A 는 weak topology로 closed이다.

Examples.

1 . $[0, 1]$

$(0, 1]$ 은 subspace topology로 보면 K 에서 open이지만, weak topology로 보면 이는 closed이다. 왜냐하면 각 K 의 simplex들과 $(0, 1]$ 과의 교집합은 \emptyset 혹은 simplex 자신으로 나오므로 이는 closed이다.

2 .

그림 7

σ 에 대해 $\overset{\circ}{\sigma}$ 는 $|K|_w$ 에서 open 이다. 왜냐하면 $\overset{\circ}{\sigma}$ 와, σ 를 제외한 나머지 τ 와의 교집합은 모두 \emptyset 이고 이는 τ 에서 open이다. 또한 σ 와의 교집합은 $\overset{\circ}{\sigma}$ 인데 이 역시 σ 에서 open이므로 $\overset{\circ}{\sigma}$ 는 $|K|_w$ 에서 open 이다.

하지만 $\overset{\circ}{\sigma}$ 는 $|K|_s$ 에서 open 이 아니다. subspace topology 로 봤을 때, $\overset{\circ}{\sigma}$ 상의 한 점에서 어떤 근방을 잡아도 다른 simplex $\tau \in K$ 와 만나므로 interior point가 될 수 없다. 따라서 $\overset{\circ}{\sigma}$ 는 open일 수가 없다.

3 . If K is a *finite* simplicial complex in \mathbf{R}^N , then

$$\text{weak topology of } |K| = \text{subspace topology of } |K|.$$

증명(\supseteq)는 이미 앞에서 보였고, (\subseteq)를 보이면 된다. F 를 $|K|_w$ 에서 closed인 subset 이라고 하자. 그러면 모든 σ 에 대해 $F \cap \sigma$ 는 σ 에서 closed이고, σ 는 \mathbf{R}^N 에서 closed 이므로 $F \cap \sigma$ 는 \mathbf{R}^N 에서 closed이다. 그러면, $F = \bigcup_{\sigma} (F \cap \sigma)$

이므로 closed subset의 finite union은 역시 closed하다는 성질에 따라 F 는 \mathbf{R}^N 에서 closed이다. □

이제 두 simplicial complex 사이의 함수를 정의하자.

정의 5 A simplicial map $\phi : K \rightarrow L$ is a function from $V(K)$ to $V(L)$ such that $\sigma \in K \Rightarrow \phi(\sigma) \in L$.

두 simplicial map을 합성한 것은 역시 simplicial map이 되고, 1_K 역시 simplicial map 이 된다. 따라서 simplicial complex들과 simplicial map들은 category를 형성한다.