# Abstract Simplicial complex

**정의 1** *An (abstract) simplicial complex* consists of a set $V$ of vertices and a collection $K$ of finite non-empty subsets of $V$ called simplices such that
1 . $v \in V \Rightarrow \{v\} \in K$,
2 . $\sigma \in K$ , $\emptyset \neq \tau \subset \sigma \ \Rightarrow \ \tau \in K$ .( 이 때 $\tau$를 $\sigma$의 face라고 하고, $\tau < \sigma$로 쓴다.)

앞에서 정의했던 것과 마찬가지로 dimension, subcomplex, p-skeleton을 정의하자.
$dim\, K := sup\{dim\, \sigma \,|\, \sigma \in K\}$.
$L \subset K$ is a $subcomplex (L < K)$ if $L$ is a simplicial complex in its own right.
$K^p = p - skeleton$ of $K$= collection of all simplices of $K$ of dim$\leq \ p$
**Examples.**
1 . 임의의 주어진 집합 A에 대해 $F(A)$를 A의 모든 유한부분집합(공집합 제외)들의 집합이라고 두자. 그러면 $K = F(A)$는 $V = A$로 하는 simplicial complex가 된다.
2. K, L이 simplicial complex 일 때 $K$와 $L$의 join$K * L$을 다음과 같이 정의하자.
$K * L = K \coprod L \coprod \{\sigma \coprod \tau \mid \sigma \in K, \tau \in L\}$.
이것 역시 simplicial complex가 된다. 예를 들어 두 1-dim simplex $K, L$ 을 join하면 3차원짜리 사면체가 나오게 되고, $K = \{point\}$ 인 경우 2차원 삼각형 L과 join하면 속이 찬 사면체가 나오게 된다. ($K$가 한 점일 때 $K$와 $L$의 join을 $L$상의 cone이라고 한다.)

**숙제 13.** $\sigma^n * \sigma^m = \sigma^{n+m+1}$.
$S^n * S^m = S^{n+m+1}$.
($\sigma^n$는 n차원 simplex이고 $S^n$은 n차원 sphere를 뜻한다.)

이제 abstract simplicial complex의 underlying space를 정의하자.

$K$를 simplicial complex, $\sigma = \{v_0, \cdots, v_n\} \in K$라고 하자. 이 때, 다음과 같이 $|K|$를 정의한다.
Let $|\sigma| = \{\sum_{i=0}^{n} t_i v_i \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, \ t_i \geq 0\}$ and, $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|$
with identification$(1 \cdot v = v$ and) $0 \cdot v = 0$.
이를 formal하게 쓰면,

$|K| = \{x : V \to [0,1] \mid \{v \in K \mid x(v) \neq 0\} \in K, \sum_{v \in K} x(v) = 1\}$ and
$|\sigma| = \{x \in |K| \mid x(v) = 0 \ if \ v \notin \sigma\}$ and $x(v_i) = t_i$.
$x(v) = t_v(x)$로 정의된 $t_v : |K| \to [0,1]$ 를 $x$의 $v$번째 barycentric coordinate이라고 한다. 만일 모든 $v$에 대해 $t_v(x) = t_v(y)$ 이면 $x = y$ 이다.

이제 $|K|$에 topology를 주자.
topology of $|\sigma|$ : $x, y \in \sigma$, $x = \sum t_i v_i$, $y = \sum s_i v_i$ 에 대해
$d(x,y) := \sqrt{\sum (t_i - s_i)^2}$ 로 주면
$|\sigma| \cong$ *standard simplex* $< e_1, \cdots, e_n > \subset \mathbf{R}^{n+1}$.(isometric 하다.)
$\cong$ *any affine simplex* $< a_0, \cdots, a_n > \subset \mathbf{R}^N$ with the subspace topology.
( 이 affine simplex $< a_0, \cdots, a_n >$를 a geometric realization of $|\sigma|$라고 한다.)
topology of $|K|$를 weak topology generated by $\{|\sigma| \mid \sigma \in K\}$로 정의한다.

**정리 1** $f : |K| \to X$ *is continuous* $\Leftrightarrow$ $f|_{|\sigma|}$ *is continuous* $\forall\ |\sigma| \in K$.

**증명** $\Rightarrow$ 는 당연하고 $\Leftarrow$ 를 보이자.
$X$에서 closed인 $C$에 대해 $f^{-1}(C)$가 closed in $|K|$임을 보이면 된다. 그런데 임의의 $|\sigma|$에 대해 $f^{-1}(C) \cap |\sigma| = f|_{|\sigma|}^{-1}(C)$ 이고 이는 $|\sigma|$ 에서 closed 이므로 따라서 $f^{-1}(C)$는 $|K|$에서 closed이다. □

**따름정리 2**
*(1)* $t_v : |K| \to [0,1]$ *is continuous.*
*(2)* $|K|$ *is a Hausdorff space.*
*(3)* $A \subset |K|$ *is compact* $\Leftrightarrow$ $A$ *is closed subset of* $|L|$ *for some finite subcomplex* $L$ *of* $K$*. In particular,* $|K|$ *is compact if and only if* $K$ *is a finite simplicial complex.*

**증명** (1)은 각 simplex 상에서 coordinate function $t_v$는 연속이므로 따라서 $|K|$에서도 연속이다.
(2)는 만일 $x \neq y$ in $|K|$ 이라면 $t_v(x) \neq t_v(y)$ 를 만족하는 $v$가 존재하므로 따라서 (1)에 의해 $x, y$를 separate 시킬 수 있다.
(3)에서 $\Leftarrow$를 보이자. $|L| = \bigcup_{\sigma \in L} \sigma$이고 각 $\sigma$는 compact이다. $L$ 이 finite 이면 $|L|$은 compact set들의 finite union이므로 $|L|$ 역시 compact 이다. 따라서 $L$의 closed subset $A$ 역시 compact이다.
$\Rightarrow$를 보이기 위해 compact인 $A \subset |K|$ 와 $\forall \sigma \in K$ 에 대해 $A \cap \mathring{\sigma}$ 를 생각하자. $A \cap \mathring{\sigma}$가 non-empty인 $\sigma$마다 $A \cap \mathring{\sigma}$ 에 속하는 원소를 하나씩 뽑아 $x_\sigma$라 두고 이들을 모은 것을 $A'$라 두자. 이 때 $|K| = \coprod_{\sigma \in K} \mathring{\sigma}$이므로 $A'$이 finite임을 보

이면 충분하다. $A' \subset A$ 이고 $A'$의 모든 subset B는 closed가 되므로 ($B \cap \sigma$가 finite set이므로 $\sigma$의 closed subset이 되고 weak topology의 정의에 의해 $B$는 closed이다.) $A'$는 discrete하다. 또한 $A'$은 compact한 $A$의 closed subset이므로 $A'$역시 compact이다. 즉 $A'$는 compact, discrete set이므로 finite set이 되어야 한다.

$\square$