Simplicial map

$f : K \to L$를 simplicial map 이라고 두자. 즉 $f : V(K) \to V(L)$, $f(\sigma) \in L$ if $\sigma \in K$. 이때 다음과 같은 map을 생각하자.

$$"f" : |K| \to |L| \text{ defined as : } \sum_{i=0}^{n} t_i v_i = x \in |K| \Rightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)$$

즉 $"f"(|\sigma|) = |f(\sigma)|$ 이다. 이 $"f"$를 f에 의해 induced된 simplicial map이라고 한다.

Note. 1. simplicial map $\circ$ simplicial map = simplicial map.
2. $"f"$ is continuous.

$f : K \to L$ 가 simplicial isomorphism 이면 $"f" : |K| \to |L|$ is a homeomorphism 이고, 이를 simplicial homeomorphism이라고 부른다.

명제 1 *K 가 finite simplicial complex 이면 $|K|$는 $\mathbf{R}^N$에 embedd된다.*

증명 K가 finite이므로 $V(K) = \{v_0, \cdots v_N\}$ 라고 놓고, $\mathbf{R}^N$안에서 geometrically independent하게 $a_0, \cdots, a_N$를 잡는다. 그리고 $< a_0, \cdots, a_N >= \sigma^N$으로 놓고 이 σ^N과 그것의 face 들로 이루어진 simplicial complex 를 $\triangle^N$ 라 놓자. 이 때 K와 $\triangle^N$사이에 다음과 같은 함수를 생각하자.
Define $f : K \to \triangle^N$ by $f(v_i) = a_i, \quad i = 0, \cdots, N$.
그러면 $\{v_0, \cdots, v_N\}$의 subset들의 image들은 $\{a_0, \cdots, a_N\}$들의 subset들이 되는데 이들은 모두 $\triangle^N$상에서 simplex 가 되므로 f는 simplicial map이 된다.
따라서 f는 K와 $\triangle^N$의 subcomplex $L = f(K)$사이의 isomorphism을 주므로 $"f" : |K| \to |L|_w$ 는 homeomorphism 이 된다.
이 때 L은 finite 하므로 $\mathbf{R}^n$에서 $|L|_s = |L|_w$ 이고 따라서
$"f" : |K| \to |L|_s \subseteq \mathbf{R}^n$ 가 homeomorphism이 되어 $|K|$는 $\mathbf{R}^n$에 embedding이 된다.

□

정의 1 *star(v)*
$v \in V(K)$에 대해 $st(v) := \bigcup_{v \in \sigma} int(|\sigma|) = \{x \in |K| \mid t_v(x) \neq 0\}$.

이 때, $\overline{st(v)} = \bigcup_{v \in \sigma} |\sigma|$ 임을 보이자.

$(\subseteq)$ $\quad st(v) = \bigcup int(|\sigma|) \subseteq \bigcup |\sigma|$ 이고, $\bigcup |\sigma|$은 closed이므로 $\overline{st(v)} \subseteq \bigcup_{v \in \sigma} |\sigma|$이다.

$(\supseteq)$ $v \in \sigma$인 각 σ들은 $\sigma \in \overline{st(v)}$ 이므로 $\bigcup_{v\in\sigma} |\sigma| \subseteq \overline{st(v)}$ 이다.
따라서 $\overline{st(v)}$는 $|K|$에서 closed이고, $lk(v) := \overline{sk(v)} - st(v)$ 로 정의한다.

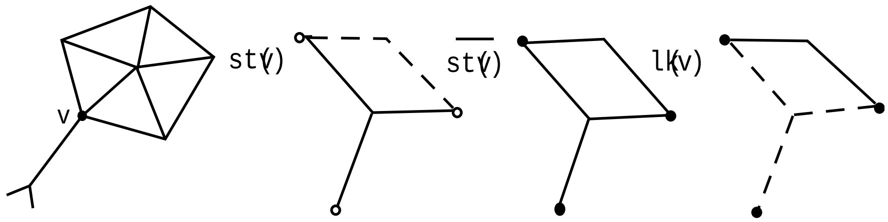

그림 8

숙제 14. 다음을 보여라.
K is locally finite.
$\Leftrightarrow |K|$ is locally compact.
$\Leftrightarrow |K|$ is metrizable with respect to d, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{v\in V}(t_v(x) - t_v(y))^2}$.

숙제 15. If K is countable and locally finite and $dim\, K \leq n$, then $|K|$ can be embedded as a closed subset in $\mathbf{R}^{2n+1}$.
(*Hint.*) Use a curve $C = (t, t^2, \cdots, t^{2n+1})$.
이 C위의 어떤 2n+2개의 점을 뽑아도 이들은 geometrically independent하다.