Simplicial approximation theorem

Barycentric subdivision, sdK
$\sigma = < a_0, \cdots, a_n > \subset \mathbf{R}^n$ 이 주어졌다고 하자. 이 때, σ의 barycenter 를
$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} a_i$$
로 정의하자. 그러면, $\mathbf{R}^n$의 simplicial complex K에 대해 barycentric subdivision sdK는 다음과 같이 정의된다.

$V(sdK) = \{\hat{\sigma} \,|\, \sigma \in K\}$ 이고, $sd(K) = \{\{\hat{\sigma_1}, \cdots, \hat{\sigma_p}\} \mid \sigma_1 \lneq \cdots \lneq \sigma_p\,,\ \sigma_i \in K, p = 1, 2, \cdots\}$.

Note. $|sdK| = |K|$.

정의 1 *(mesh(K))* K가 $\mathbf{R}^N$ 의 finite simplicial complex 일 때
$mesh(K) := max\{diam(\sigma) \mid \sigma \in K\}$.

명제 1
(1) σ *가* $\mathbf{R}^N$*의* n*차원 simplex일 때,* $mesh(sd(\sigma)) \leq \frac{n}{n+1} mesh(\sigma)$ *이다.*
(2) K *가* $\mathbf{R}^N$*의* n*차원 finite simplicial complex일 때,*
$mesh(sd(K)) \leq \frac{n}{n+1} mesh(K)$ *이다.*

증명 (2)는 (1)의 내용과 $\frac{x}{x+1}$이 증가함수라는 사실로부터 바로 나오므로, (1)을 증명하자. 이를 증명하기에 앞서 다음 Note를 살펴보자.
Note. 1.$\forall\ \sigma$, $\exists$ an edge $e < \sigma$ such that $diam(\sigma) = length(e)$.
2.$\forall\ x \in \sigma$, $|\hat{\sigma} - x| \leq |\hat{\sigma} - v|$ for some vertex v of σ, and $|\hat{\sigma} - v| \leq \frac{n}{n+1} mesh(\sigma)$.

(증명)$|\hat{\sigma} - v_0| = |\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i - v_0|$

$= |\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(v_i - v_0)|$

$= |\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(v_i - v_0)|$

$\leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}|v_i - v_0|$

$\leq \frac{n}{n+1} max_i |v_i - v_0| \leq \frac{n}{n+1} mesh(\sigma)$ 이 된다.

이제 (1)의 증명을 하면, $\forall \tau \in sd(\sigma)$에 대해 τ의 모든 edge e는 barycenter에서 혹은 face의 barycenter에서 나가므로 Note 2에 의해 $length(e) \le \frac{n}{n+1} mesh(\sigma)$ 이다. 따라서 Note 1에 의해 $mesh(\tau) \le \frac{n}{n+1} mesh(\sigma)$ 이다. □

따름정리 2 *$mesh(sd^N K) \le C(\frac{n}{n+1})^N$ and converges to 0 if $N \to \infty$.*

Note. $g : |K| \to |L|$이 simplicial map 이면, $\forall\, v \in V(K)$ 에 대해
$g(st(v)) \subset st(g(v))$ 이다.
(증명)$x \in st(v) \Leftrightarrow t_v(x) > 0$.
g가 simplicial map이므로 $t_v(x) \le t_{g(v)}(g(x))$ 이고 따라서
$t_{g(v)}(g(x)) > 0 \Rightarrow g(x) \in st(g(v))$.

명제 3 *Let $f : |K| \to |L|$ be a map and $g : |K| \to |L|$ be a simplicial map. Then the followings are equivalent.*
(1) $\forall\, x \in |K|,\ f(x) \in \mathring{\tau} \Rightarrow g(x) \in \tau$.
(2) $\forall\, x \in |K|,\ f(x) \in \tau \Rightarrow g(x) \in \tau$.
(3) $\forall\, v \in V(K), f(st(v)) \subset st(g(v))$.
이 경우 g를 f의 simplicial approximation 이라고 한다.

증명 (2)⇒(1) 은 당연하다.
(1)⇒(3) $x \in st(v)$,$f(x) \in \mathring{\tau}$ 라 놓자. 그러면
$t_v(x) > 0,\ g(x) \in \tau$
$\Rightarrow t_{g(v)}(g(x)) > 0,\ g(x) \in \tau$
$\Rightarrow g(x) \in st(g(v))$ and $g(x) \in \tau$
즉 $g(v)$는 τ의 vertex이고, $\mathring{\tau} \subset st(g(v))$이다. 따라서 $f(x) \in \mathring{\tau} \subset st(g(v))$.
(3)⇒(2) $x \in \mathring{\sigma}$ 이고, $f(x) \in \tau$라고 가정하자. 이 때, 임의의 $v \in V(\sigma)$ 에 대해 $x \in st(v)$이다. $f(st(v)) \subset st(g(v))$ 로부터$f(x) \in st(g(v))$ 이고 따라서 $g(v)$는 τ의 vertex가 된다. 따라서 $g(\sigma) \subset \tau$ 이고 $g(x) \in \tau$이다.

□

정리 4 *Let $f : |K| \to |L|$ be a map which satisfies "star condition", i.e., $\forall\, v \in V(K),\ \exists\, w \in V(L)$ such that $f(st(v)) \subset st(w)$. Then $\exists\, g : K \to L$ which is a simplicial approximation of f.*

증명 모든 $v \in V(K)$에 대해 $f(st(v)) \subset st(w)$를 만족하는 아무런 w 를 선택하여 $g(v) = w$로 정의하자. 이제 이 g가 simplicial map임을 보이기 위해 $< v_0, \cdots, v_k >$ 가 simplex 이면, $< g(v_0), \cdots, g(v_k) >$가 simplex 임을 보이자. simplex $< v_0, \cdots, v_k >$를 σ로 놓으면 $\mathring{\sigma}$에 들어가는 $x \in \mathring{\sigma}$ 가 존재하고, 이 x에 대해 $x \in \bigcap_{i=0}^{n} st(v_i)$ 이다. 이 때,

$f(x) \in f(\bigcap st(v_i)) \subset \bigcap f(st(v_i)) \subset \bigcap st(w_i)$, $w_i = g(v_i)$ 이 되어 모든 i에 대해 $f(x) \subset st(w_i)$ 이므로 $t_{w_i}(f(x)) > 0, \forall\ i$ 이다. 따라서
$< w_0, \cdots, w_k > = < g(v_0), \cdots, g(v_k)) >$ 는 simplex를 형성한다.(interior point $f(x)$가 존재하므로). 따라서 g는 simplicial map이 되고 $f(st(v)) \subset st(g(v))$를 만족하므로 앞의 명제 3의 (3)을 만족하여 g는 f의 simplicial approximation이 된다. □

Remark. $f : |K| \to |L|$가 K의 subcomplex M에서 이미 simplicial map이라고 하자. 그러면 위 정리의 증명과정에서 g를 잡을 때, M에서의 값은 그대로 주고 (앞 Note에서 simplicial map은 star condition을 만족하므로) 나머지 부분만 정리의 증명처럼 하면 되므로 $g|_{|M|} = f|_{|M|}$ 이 되도록 approximation 시킬 수 있다.

정리 5 *(Simplicial approximation theorem)*
K,L 은 finite simplicial complex 들일 때,
(1) 주어진 map $f : |K| \to |L|$ 에 대해 어떤 N 이 존재해서 f는 simplicial approximation $g : sd^N K \to L$ 을 가질 수 있다.
(2) g가 f의 simplicial approximation이면, $f \simeq g$ 이다.

증명
(1) $\mathcal{U} = \{f^{-1}(st(w)) \,|\, w \in V(L)\}$ 은 $|K|$의 open covering 이 된다. K가 finite이므로 $|K|$는 compact이고 따라서 open covering $\mathcal{U}$에 대해 Lebesgue number ϵ이 존재한다. 이 때, $mesh(sd^N K) < \frac{\epsilon}{2}$ 를 만족하도록 N을 충분히 크게 잡으면 $sd^N K$ 안의 각 star들은 diam이 ϵ보다 작고 따라서 어떤 $U \in \mathcal{U}$에 포함된다. 그러면 $f : |sd^N K| \to |L|$ 은 star condition을 만족하고 $|sd^N K| = |K|$ 이므로 정리 4에 의해 우리가 원하던 g 가 존재한다.
(2) g를 f의 simplicial approximation이라고 하자. 먼저 L은 finite이므로 $\mathbf{R}^N$에 embedded되어 있다고 가정해도 좋다. 이 때 $F : |K| \times I \to |L|$, $F(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x)$ 가 f와 g사이의 homotopy가 됨을 보이자. 먼저 각 $f(x)$와 $g(x)$는 같은 simplex에 놓여 있으므로 F는 잘 정의된다. 또한 f와 g는 연속이므로 F 역시 연속이다. 따라서 F는 원하는 homotopy이다.

Remark. 정리 5에서 꼭 $sd^N K$ 여야 할 필요는 없다. 증명에서 $mesh$ 조건을 만족하는 어떤 subdivision에 대해서도 성립한다.
또한 K와 L이 finite가 아니라도 성립한다.(See Munkres 16.5,19.4,20.5.) 이를 보이기 위해 다음 사실이 필요하다.

Fact. $F : |K| \times I \to |L|$ is continuous
$\Leftrightarrow$ $F : |\sigma| \times I \to |L|$ is continuous.

(이것의 증명은 다음 숙제로부터 자명하다.)

숙제 16.
The topology of $|K| \times I$ is coherent with the subspaces $\{|\sigma| \times I \mid \sigma \in K\}$.

$\square$