Application

1 . $\pi_1(S^n)$=**0,** $n \geq 2$
증명 simplicial approximation 정리와 $S^n \setminus \{point\} = \mathbf{R}^N$이 contractible이라는 것을 이용하자. S^1에서 S^n으로 가는 α가 onto만 아니라면, S^n상에서 α의 image가 아닌 점 x_0 를 생각할 수 있고 $S^n \setminus \{x_0\} = \mathbf{R}^N$이 contractible이므로 증명이 완성된다.
먼저 simplicial map 자체는 p-skeleton 을 p-skeleton 으로 보내므로 α의 simplicial approximation α'는 onto가 될 수 없고, 따라서 α'은 한 점으로 contractible 하고 $\alpha \sim \alpha'$ 이므로 α 도 contractible하다.
이 증명에서 base point는 vertex가 되도록 simplicial complex 구조를 S^1과 S^n에 적당히 준다. 정리 4의 Remark에 의해 $\alpha(base\ point) = \alpha'(base\ point)$라 두어도 상관없다.

□

2 . $i : K^1 \hookrightarrow K$ **induces an epimorphism** $i_* : \pi_1(|K^1|) \to \pi_1(|K|)$.
$i : K^2 \hookrightarrow K$ **induces an isomorphism** $i_* : \pi_1(|K^2|) \to \pi_1(|K|)$.

증명 먼저 epimorphism 이 됨을 보이자. $\pi_1(|K|)$의 원 $\{\alpha\}$에 대해 simplicial approximation α'을 생각하자. 먼저 $\alpha \sim \alpha'$ 임을 알고 있고 (α와 α' 사이의 homotopy F는 $F(x,t) = t(fx) + (1-t)g(x)$ 였으므로 만일 $f(x_0) = g(x_0)$ 이라면 $F(x_0, t)$ 가 t가 변하는 동안 계속 $f(x_0) = g(x_0)$ 로 유지된다.) $\{\alpha'\} \in \pi_1(|K^1|)$이다. 즉 $i_*(\{\alpha'\}) = \{\alpha\}$ 를 만족하는 $\{\alpha'\}$가 있으므로 onto 임이 증명되었다. 따라서 두번째 명제는 1-1 임을 보이기만 하면 된다. 1-1 임을 보이기 위해 이전에 보였던 다음 note를 이용하자.
Note. $\alpha : S^1 \to X$ *represent a zero element in* $\pi_1(X)$ *if and only if* $\exists$ *extension* $\overline{\alpha} : D^2 \to X$.
어떤 $\{\alpha\} \in \pi_1(|K^2|)$ 가 i_*에 의해 identity 로 간다면, α를 $|K|$의 loop로 봤을 때 위 note 에 의해 extension $\overline{\alpha}$ 가 존재하므로 다음 diagram 이 성립한다.

$$\begin{array}{ccc} |K^2| & \to & |K| \\ \alpha\uparrow & & \\ S^1 & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} |K^2| & \to & |K| \\ \alpha\uparrow & & \uparrow\exists\,\overline{\alpha} \\ S^1 & \subset & D^2 \end{array}$$

여기서 $\overline{\alpha}$의 simplicial approximation $\overline{\alpha}'$를 잡으면

$$\begin{array}{ccc} K^2 & \to & K \\ \exists\,\overline{\alpha'} & \nwarrow & \\ & & D^2 \end{array}$$

가 되고 이 때 $\{\overline{\alpha}'|_{\partial D^2}\} = \{\alpha\}$ 이다. 왜냐하면, $\overline{\alpha}' \simeq \overline{\alpha}$ 이고 $\overline{\alpha}|_{\partial D^2} = \alpha$ 이므로 $\overline{\alpha}'|_{\partial D^2}$은 α와 equivalent하다. 따라서 $\{\overline{\alpha}'|_{\partial D^2}\} = \{\alpha\}$ 이다. 그런데

$\{\overline{\alpha}'|_{\partial D^2}\} = 0$ 이므로 $\{\alpha\} = 0$ 이다. 따라서 1-1임을 보였다.

$\square$