Edge Path Group

simplicial complex K와 $V(K) = \{v_0, \cdots, v_m\}$에 대해 $\Omega(|K|, v_0)$에서 simplicial loop들만 보자. 즉 다음과 같은 simplicial loop들의 집합을 정의하자.
$\Omega_s(K, v_0)$=the set of simplicial loops
$\qquad =\{v_0 v_{i_1} \cdots v_{i_k} v_0 \mid v_i \in V(K), \{v_0, v_{i_1}\}, \cdots, \{v_{i_k}, v_0\} \in K\}$

이제 $\Omega_s(K, v_0)$에 equivalence relation $\overset{s}{\sim}$를 다음 3가지 equivalence에 의해 generate된 것으로 주자.
(1) $\cdots v_i v_i \cdots \overset{s}{\sim} \cdots v_i \cdots$
(2) $\cdots v_i v_j v_i \cdots \overset{s}{\sim} \cdots v_i \cdots$
(3) $\cdots v_i v_j v_k \cdots \overset{s}{\sim} \cdots v_i v_k \cdots$ if $\{v_i, v_j, v_k\} \in K$
이 때 $\Omega_s(K, v_0)/\overset{s}{\sim} := E(K, v_0)$를 (K, v_0)의 edge path group이라고 한다. 이 때 group operation은 juxtaposition 이다.

$E(K, v_0)$ 가 group이 됨을 보이자. 먼저
$(\{v_0 v_{i_1} \cdots v_0\}\{v_0 v_{j_1} \cdots v_0\})\{v_0 v_{k_1} \cdots v_0\} = \{v_0 v_{i_1} \cdots v_0\}(\{v_0 v_{j_1} \cdots v_0\}\{v_0 v_{k_1} \cdots v_0\})$
는 위 세가지 equivalence 에 대해 성립하므로 결합법칙을 만족하고,
$\{v_0\} \in E(K, v_0)$ 가 group operation의 identity 가 된다. 그리고$\{v_0 v_{i_1} \cdots v_{i_k} v_0\} \in E(K, v_0)$에 대해 inverse는 $\{v_0 v_{i_k} \cdots v_{i_1} v_0\}$가 된다. 따라서 $E(K, v_0)$ 는 group 이 된다.

정리 1 $E(K, v_0) \cong \pi_1(|K|, v_0)$

증명 두 group사이의 isomorphism을 찾기 위해 먼저 다음 함수를 생각하자.

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \Omega_s(K, v_0) & \to & \Omega(|K|, v_0)/\sim \\ & v_0 v_{i_1} \cdots v_{i_{k-1}} v_0 & \mapsto & \{\alpha\} \end{array}$$

여기서 $\alpha : I \to |K|$는 $\alpha(\frac{j}{k}) = v_{ij}$, $j = 0, 1, \cdots, k$, $v_{i_0} = v_{i_k} = v_0$로 정의되는 simplicial map이다. 이 ϕ에 의해 induce되는 $\phi_\sharp : \Omega_s/\overset{s}{\sim} \to \Omega/\sim$을 얻을 수 있고, 이 때 다음 네 가지를 보이자.

(1) $\phi_\sharp$ is well defined :
첫번째 equivalence relation $\overset{s}{\sim}$에 대해 $\phi_\sharp(v_0 \cdot\cdot v_i v_i \cdot\cdot v_0) = \phi_\sharp(v_0 \cdot\cdot v_i \cdot\cdot v_0)$ 임을 알 수 있고, 나머지 두개에 대해서도 마찬가지로 확인할 수 있다.

(2) $\phi_\sharp$ is a homomorphism :
$\phi(\{v_0 v_{i_1} \cdot\cdot v_0\}) = \alpha$ 와 $\phi(\{v_0 v_{j_1} \cdot\cdot v_0\}) = \beta$ 에 대해 $\phi(\{v_0 v_{i_1} \cdot\cdot v_0\} \circ \{v_0 v_{j_1} \cdot\cdot v_0\})$은 juxtaposition에 의해 α와 β의 juxtaposition으로 가고 이는 $\phi(\{v_0 v_{i_1} \cdot\cdot v_0\}) \circ$

$\phi(\{v_0 v_{j_1} \cdot\cdot v_0\})$ 와 같다.

(3) $\phi_\sharp$ is onto :
임의의 $\alpha \in \pi_1(|K|, v_0)$에 대해 α의 simplicial approximation $\overline{\alpha}$ 가 존재한다. $\phi_\sharp(\overline{\alpha}) = \alpha$ 가 되어 onto이다.

(4) $\phi_\sharp$ is 1-1 :
α, β $\in \Omega(K, v_0)$에 대해 $\phi(\alpha) \sim \phi(\beta)$이라고 가정하고 $\alpha \overset{s}{\sim} \beta$ 임을 보이자. 먼저 α, β 에 대해 각각 다음과 같이 α', β'을 잡자. $\phi(\alpha)$와 $\phi(\beta)$ 사이의 homotopy F , $F(0,t) = \alpha(t), F(1,t) = \beta(t)$에 대해 F의 simplicial approximation(G라 두자)이 존재하도록 다음과 같이 subdivision한다.
그림10
이 때 $G(0,t) = \alpha'(t), G(1,t) = \beta'(t)$ 으로 두면 이 α' 역시 v_0를 base point로 하는 loop가 된다. 그리고 앞 simplicial approximation 정리의 Remark들로부터(simplicial map의 approximation은 그대로 똑같이 유지되고, 그렇지 않은 부분은 approximation을 취하면 원래의 부분과 같은 face에 있다) $\alpha \overset{s}{\sim} \alpha', \beta \overset{s}{\sim} \beta'$ 이다. 따라서 $\alpha' \overset{s}{\sim} \beta'$를 보이면 $\alpha \overset{s}{\sim} \beta$임을 보일 수 있다.
그림11
위의 과정대로 하면 $\alpha' \overset{s}{\sim} \beta'$ 임을 알 수 있다. □

따름정리 2
If K is a finite simplicial complex , then $\pi_1(|K|, v_0)$ is finitely generated.

증명 $E(K, v_0)$는 다음 그림과 같은 꼴의 기본 원소들에 의해 generate된다.

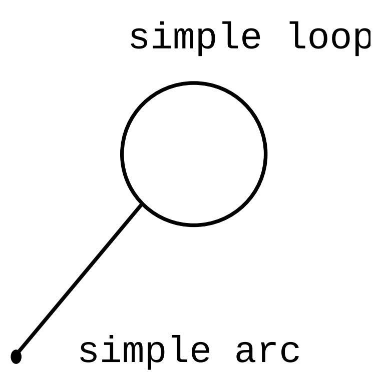

그림 12

만일 위의 그림과 달리 self-crossing이 일어난다면, 이는 다시 위와 같은 기본 원소들의 곱으로 표현 가능하다. 그리고 각 vertex가 유한개이므로 이런 기

본 원소들의 갯수 역시 유한개이다.

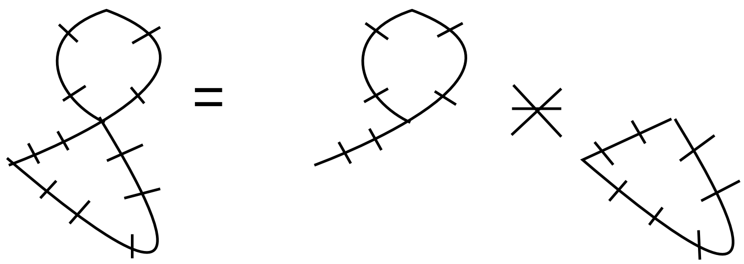

그림 13

□

따름정리 3 $i_\sharp : \pi_1(|K^2|, v_0) \to \pi_1(|K|, v_0)$ *is an isomorphism.*

증명 앞에서 이미 이는 증명한 적이 있지만 여기서는 다르게 증명해 보이자. 정리 1에 따르면 $\pi_1(|K^2|, v_0) \cong E(K^2, v_0)$ 이고 $\pi_1(|K|, v_0) \cong E(K, v_0)$ 이다. 그런데 $E(K, v_0)$는 K^1, K^2에 의해 결정되므로 $E(K^2, v_0) = E(K, v_0)$이다. 따라서 $\pi_1(|K^2|, v_0) \cong \pi_1(|K|, v_0)$ 이다. □