Examples

1. $\pi(S^1) = \mathbb{Z}_1 = F_1$

$\pi_1(figure \ \ eight) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$.
$\pi_1(S^2 \vee S^1) = 1 * \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = F_1$.
$\pi_1(S^2 \vee S^2) = 1$.
$\pi_1(S^1 \vee S^2 \vee S^1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$.

2. $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ **;**

torus를 아래 그림과 같이 보자.

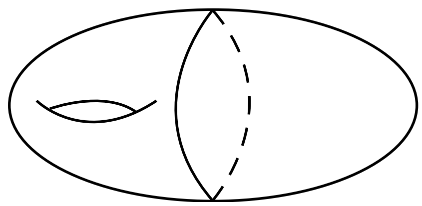

그림 17

그림의 왼쪽 부분을 A라 두고 오른쪽 부분을 B라 두면, 이 때 torus $K = A \cup B$가 된다. 이를 아랫그림과 같이 표현할 수 있다.

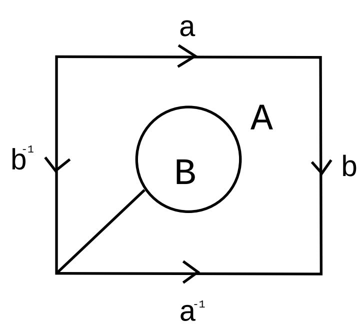

그림 18

$A, B, K, A \cap B, A \cup B$ 는 Van Kampen Theorem 의 조건을 모두 만족하므로 $\pi_1(K, v_0) = \pi_1(A, v_0) * \pi_1(B, v_0)/N$임을 알 수 있다. 따라서 $\pi_1(A, v_0)$와

$\pi_1(B,v_0)$를 알면 된다. $\pi_1(A,v_0)$는 위 그림의 A부분에서 사각형 내부의 원을 바깥 사각형의 boundary로 retract 시키면 이는 $aba^{-1}b^{-1}$ 가 되어 figure eight 과 같은 꼴이 된다. 따라서 $\pi_1(A,v_0)$ 는 F_2 가 된다. $\pi_1(B,v_0)$는 1임을 쉽게 알 수 있고 $A\cap B$는 circle 이므로 $\pi_1(A\cap B)=\mathbb{Z}$ 이다. 그리고

$$\begin{array}{ccc} F_2 =< a,b \mid \ > & & 1 \\ i\nwarrow & & \nearrow j \\ & \mathbb{Z} =< x \mid \ > & \end{array}$$

위 diagram에서 $\underset{\mathbb{Z}}{*}$의 정의에 따라 $i(x)$ 와 $j(x)$ 를 같게 보는 relation을 주면 되므로 generator 는 a,b이고 relation 은 $x\in\pi_1(A\cap B)$에 대해 $i(x)=j(x)$ 이다. 즉 $\pi_1(K,v_0) =< a,b \mid i(x)=j(x) >$ 이다. 그런데 $\pi_1(B,v_0)=1$ 이므로 $j(x)=1$ 이고 A와 B의 교집합 부분인 circle에 대해서는 $i(x)$는 바깥 사각형이 되므로 $i(x)=aba^{-1}b^{-1}$ 이 된다. 따라서 relation은 $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}=1$ 이다. 그러므로 $\pi_1(T^2)=F_2\underset{\mathbb{Z}}{*}1 =< a,b \mid [a,b]=1 >= \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$이다.

3. $\pi_1(P^2)=\mathbb{Z}/2$;
(방법 1.) S^2 는 P^2의 covering 임을 알고 있다. 그런데 S^2는 simply connected이므로 S^2는 P^2의 universal covering 이다. $p^{-1}(x)$와 $\pi_1(X)/p_\sharp\pi_1(X)$는 일대일대응관계를 가지는데 universal covering이라는 성질에서 $p_\sharp\pi_1(X)$는 1이 되어 $\pi_1(X)$는 $p^{-1}(x)$ 즉 fiber와 개수가 같다. P^2의 각 점에 대해 fiber가 두 점이므로 $\pi_1(P^2)$는 $\mathbb{Z}/2$일 수 밖에 없다.

(방법 2.) Van Kampen theorem을 이용하기 위해 P^2를 아래 그림과 같이 보자.

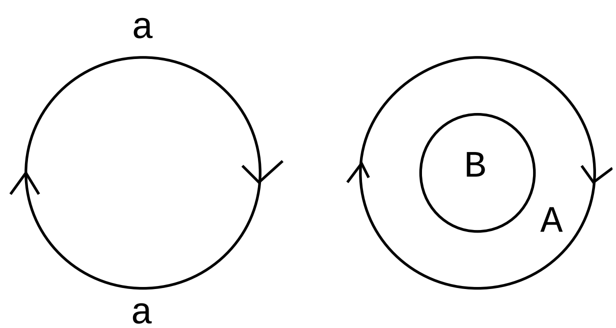

그림 19

이 때 $\pi_1(A) = \mathbb{Z} =< a \mid \;\; >$, $\pi_1(B) = 1$, $\pi_1(A \cap B) = \mathbb{Z}$ 임을 쉽게 알 수 있고 $\mathbb{Z}_2 \underset{\mathbb{Z}}{*} 1$ 을 생각해 보자. $x \in A \cap B$ 에 대해 $i(x) = aa$ 가 되고, $j(x) = 1$ 이 되어 $a^2 = 1$ 이라는 relation을 얻는다. 따라서 $\pi_1(P^2) =< a \mid a^2 = 1 >= \mathbb{Z}/_2$ 가 된다.

이제 임의의 compact surface에 대해 fundamental group을 계산해 보자.

1. Orientable surfaces.

orientable surface는 $T^2 \sharp T^2 \sharp \cdots \sharp T^2$ 꼴로 표현되므로 genus g개짜리 다음 그림의 orientable surface를 살펴보자.

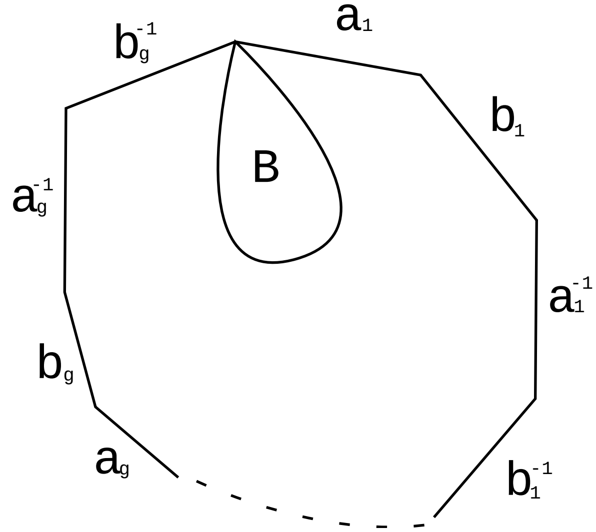

그림 20

위 그림에서 A는 $\overbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}^{2g} = \overset{2g}{\vee} S^1$ (= bouquet of 2g circles = 2g개의 circle들을 one point union한 것) 과 homotopy equivalent하므로 $\pi_1(A, v_0) = F_{2g}$ 가 된다. (genus 하나짜리는 figure eight $S^1 \vee S^1$ 이 되어 이것의 π_1은 F_2가 된다.) 또한 $\pi_1(B, v_0) = 1$ 이고 $x \in A \cap B$에 대해
$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = i(x) = j(x) = 1$ 임을 알수 있다. 따라서 다음내용이 성립한다.
$\pi_1(\Sigma g) =< a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 >$.

2. Nonorientable surfaces.

nonorientable surface $P^2\sharp P^2\sharp\cdots\sharp P^2$를 생각해보자. 다음 그림에서

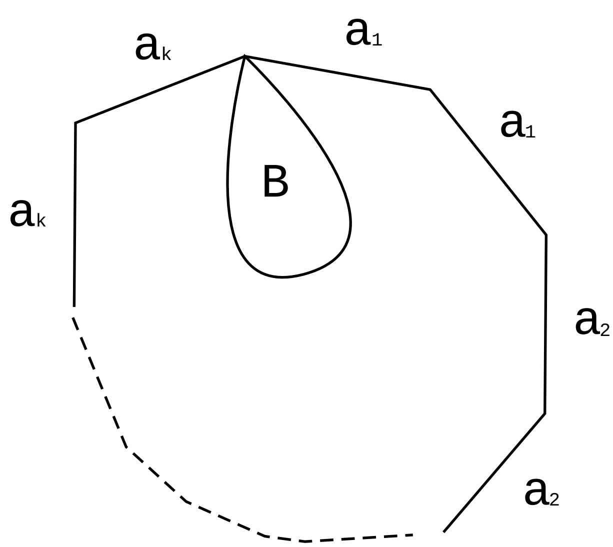

그림 21

$\pi_1(A, v_0) =< a_1, a_2, \cdots, a_k \mid \ >$ 이 되고 $\pi_1(B, v_0) = 1$ 이 된다. $x \in A\cap B$에 대해 $i(x) = j(x)$ 를 찾으면 $a_1a_1a_2a_2\cdots a_ka_k = 1$ 이 된다. 따라서
$\pi_1(N_k) =< a_1, a_2, \cdots, a_k \mid a_1^2a_2^2\cdots a_k^2 = 1 >$.

Dunce hat.

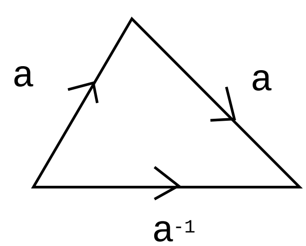

그림 22

위 그림의 π_1을 생각해 보자. 앞에서의 내용과 마찬가지로 내부에 원을 잡아서 A, B 로 나누면 $\pi_1(A, v_0) = < a \mid \ >$, $\pi_1(B, v_0) = 1$ 이고 $x \in A \cap B$에 대해 $i(x) = aaa^{-1}$ 이므로 $\pi_1(Dunce\ \ hat) = < a \mid aaa^{-1} = 1 > = < a \mid a = 1 > = 1$ 이 된다. 즉 simply connected space가 된다. 실은 Dunce hat 이 contractible space 도 되는데 이는 다음과 같이 보일 수 있다. 먼저 위의 그림을 다음과 같이 꼬깔처럼 본 다음

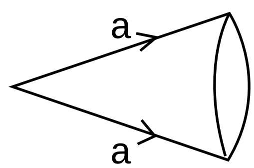

그림 23

속을 채우면 이는 Dunce hat과 homotopy equivalent 하고(사실 Dunce hat은 속을 채운 것의 strong deformation retract 이다.) contractible 함을 쉽게 알 수 있다.

위의 Dunce hat(aaa^{-1})과 달리 aaa꼴로 된 것을 살펴보자.

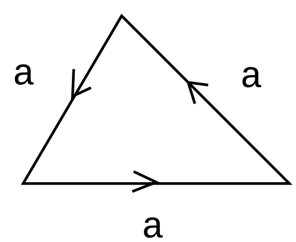

그림 24

사실 이것의 π_1은 $\mathbb{Z}/3$ 가 된다. $P^2(\ aa)$의 universal covering이 S^2 임과 비슷하게 aaa의 universal covering을 구해보아라.(Exercise) 그리고 이 covering이 3-fold covering임을 이용하면 $\pi_1 = \mathbb{Z}/3$임을 역시 알 수 있다.