Duka Gaetano SFORZA

# RICERCHE DI ESTENSIONIMETRIA DIFFERENZIALE

NEGLI

# SPAZI METRICO-PROIETTIVI

Nota di G. SFORZA

Presentata dal Socio Prof. UGO AMALDI

(Seduta del 20 dicembre 1906)

## § 1.

### Forma dell'elemento di estensione in uno spazio qualunque.

Sia $S_n$ uno spazio ad $n$ dimensioni di natura metrica arbitraria il cui elemento lineare $ds$ sia definito dalla

$$ds^2 = \sum_{1\,r,t}^{n} a_{rt}\,du_r\,du_t. \tag{1}$$

Sia poi $d^n p$ *l'estensione* del parallelepipedo $n$ volte infinitesimo le cui $n$ coppie di facce opposte sono $(u_1, u_1 + du_1), (u_2, u_2 + du_2) \dots (u_n, u_n + du_n)$; noi definiremo $d^n p$ come *un covariante algebrico differenziale d'ordine* $n$ di $ds^2$, cioè porremo $d^n p = F_a\,du_1\,du_2 \dots du_n$, ove $F_a$ sia una funzione (da determinare) delle sole $a$ e non delle loro derivate rispetto alle $u$. Per determinare $F_a$ supponiamo che cangiando le $u$ in altre coordinate $v$ le $a$ siano cangiate nelle $b$ e $d^n p$ in $d^n q$; allora sarà $d^n q = F_b\,dv_1 \dots dv_n$; ora per la regola di trasformazione dei differenziali multipli deve essere $F_b = F_a J$, ove $J = \dfrac{\partial(u_1 \dots u_n)}{\partial(v_1 \dots v_n)}$; d'altronde $J$ è anche il modulo della sostituzione lineare delle $du$ a mezzo delle $dv$, epperò la $F_b = F_a J$ ci dice che $F_a$ è un invariante della quadrica (1), cosicchè, se $D_a$ è il discriminante del secondo membro della (1) e $C$ e $\mu$ sono due costanti, deve essere $F_a = C D_a^{\mu}$; questa poi ci dà $F_b = F_a J^{2\mu}$, e così si vede che deve essere $\mu = \dfrac{1}{2}$, cioè $F_a = C\sqrt{D_a}$, ove $C$ rimane arbitraria.

Nel seguito noi prenderemo sempre $C = 1$, cioè faremo

$$d^n p = D_a^{\frac{1}{2}}\,du_1 \dots du_n. \tag{2}$$

**Forma geodetica.** — Se le $u_1 = \text{cost}$ sono geodeticamente parallele si può prendere $u_1 - u^0_1 =$ arco delle geodetiche ortogonali alle $u_1 = \text{cost}$ a partire dalla $u_1 = u^0_1$ e allora (BIANCHI, *Geom. diff.*, 2.ª ediz.) $ds_2$ assume la *forma geodetica*: $ds^2 = du^2_1 + ds^2_1$ ove $ds_1$ è l'elemento d'arco sulla $u_1 = \text{cost}$; ora, se $D$ è il discriminante di $ds^2$, è poi anche $D$ il discriminante di $ds^2_1$ e quindi per la (2), se $d^{n-1}p_1$ è l'elemento di estensione sulla $u_1 = \text{cost.}$, si ha

$$d^n p = du_1\, d^{n-1} p_1\,, \tag{3}$$

che può dirsi la *forma geodetica dell'elemento di estensione*. La (3) integrata rispetto alle $u_2, u_3, \ldots u_n$ ci dà

$$dp = p_1\, du_1 \tag{4}$$

ove $p_1$ è funzione di $u_1$ soltanto; e questa con una quadratura ci dà l'estensione (o volume) $p$ dello *strato geodetico* luogo di una geodetica di lunghezza costante che con una sua estremità descrive un'assegnata porzione $p_1^0$ della $u_1 = u_1^0$ e si mantiene ortogonale alle $u_1 = u_1^0$.

§ 2.°

## L'elemento di estensione di un luogo immerso in uno spazio metrico-projettivo nella sua forma metrico-projettiva — Ampiezza.

D'ora innanzi indicheremo con $S_n$ uno spazio ad $n$ dimensioni metrico-projettivo e con $K$ la sua curvatura costante; con $x_0, x_1, \ldots x_n$ indicheremo poi le coordinate projettive omogenee di un punto generico di $S_n$ e infine con $\Omega_{xx} = o$ l'equazione dell'assoluto in $S_n$. Con $p_m$ si intenderà una porzione finita ad $m$ dimensioni ($m \leq n$) di $S_n$ e con $d^r p_m$ ($r \leq m$) una porzione $r$ volte infinitesima di $p_m$; così l'elemento lineare sarà indicato da $dp_1$ e noi assumeremo come nota la formula metrico-projettiva

$$dp_1 = \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{dx\,dx} - \Omega^2_{x\,dx}}}{\sqrt{K}\,\Omega_{xx}}\,. \tag{1}$$

Si può da questa ricavare facilmente $d^m p_m$. Allo scopo osserviamo che le coordinate $x$ di un punto generico di $p_m$ si possono pensare come date funzioni di $m$ parametri $\varphi_1 \ldots \varphi_m$ indipendenti; sicchè, se si pone $x^i = \dfrac{\partial x}{\partial \varphi_i}$ e $b_{ih} = \Omega_{xx}\,\Omega_{x^i x^h} - \Omega_{xx^i}\,\Omega_{xx^h}$ ($i, h = 1, 2 \ldots m$), e si indica con $d\sigma$ l'elemento lineare in $p_m$, mediante la (1) si trova subito

$$d\sigma^2 = \frac{\sum_{i,h} b_{ih}\, d\varphi_i\, d\varphi_h}{K\Omega^2_{xx}}\,. \tag{2}$$

Se dunque $D$ è il discriminante della quadrica differenziale (2), pel § 1.° avremo

$$d^m p_m = \sqrt{D}\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \dots d\varphi_m \qquad (3)$$

D' altra parte si trova

$$D = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dfrac{b_{ih}}{K\Omega^2_{xx}} & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \frac{1}{K^m \Omega_{xx}^{2m}} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & b_{ih} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \frac{1}{K^m \Omega_{xx}^{2m+1}} \begin{vmatrix} \Omega_{xx} & \Omega_{xx^1} & \dots & \Omega_{xx^m} \\ 0 & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \cdot & & \dots & \cdot \\ 0 & b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{K^m \Omega_{xx}^{m+1}} \begin{vmatrix} \Omega_{xx} & \Omega_{xx^1} & \dots & \Omega_{xx^m} \\ \Omega_{x^1x} & \Omega_{x^1x^1} & \dots & \Omega_{x^1x^m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \Omega_{x^mx} & \Omega_{x^mx^1} & \dots & \Omega_{x^mx^m} \end{vmatrix}.$$

Sicchè, ponendo $d_i x = \dfrac{\partial x}{\partial \varphi_i} d\varphi_i = x^i d\varphi_i$, la (3) prende la forma *metrico-projettiva*

$$d^m p_m = \frac{1}{K^{\frac{m}{2}} \Omega_{xx}^{\frac{m+1}{2}}} \begin{vmatrix} \Omega_{xx} & \Omega_{xd_1x} & \dots & \Omega_{xd_mx} \\ \Omega_{d_1xx} & \Omega_{d_1xd_1x} & \dots & \Omega_{d_1xd_mx} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \Omega_{d_mxx} & \Omega_{d_mxd_1x} & \dots & \Omega_{d_mxd_mx} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}, \qquad (4)$$

la quale per $m = 1$ ridà la (1).

**Caso m = n.** In questo caso il determinante che compare in (4) è divisibile pel discriminante $\Delta$ di $\Omega_{xx}$ e la (4) prende la forma più semplice

$$d^n p_n = \frac{(x\, d_1x \dots d_nx)\sqrt{\Delta}}{K^{\frac{n}{2}} \Omega_{xx}^{\frac{n+1}{2}}} \qquad (5)$$

ove $(x\, d_1x \dots d_nx)$ è il determinante le cui righe sono le $x$, le $d_1x, \dots$ le $d_nx$.

**Caso K = 0** Ponendo $\Omega_{xx} = u_x^2 + K\omega_{xx}$ e passando in (4) al limite per $K = 0$ si ottiene $d^m p_m$ nell'ipotesi non Euclidea; allora poi $u_x = 0$ è l'equazione dell'iperpiano all'infinito ed $\omega_{xx} = 0$ l'equazione di una ipersfera, che, senza danno della generalità, può anche ridursi ad un ipercono-sfera (immaginario). Così si trova pel caso Euclideo.

$$d^m p_m = \frac{1}{u_x^{m+1}} \begin{vmatrix} 0 & -u_x & -u_{d_1x} & \dots & -u_{d_mx} \\ u_x & \omega_{xx} & \omega_{xd_1x} & \dots & \omega_{xd_mx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_{d_mx} & \omega_{d_mxx} & \omega_{d_mxd_1x} & \dots & \omega_{d_mxd_mx} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

In particolare per le coordinate cartesiane si può prendere

$$u_x = x_0 = 1 \quad , \quad \omega_{xx} = x_1^2 + \dots + x_n^2 + 2x_1x_2 \cos\theta_{12} + \dots + 2x_{n-1}x_n \cos\theta_{n-1,n} \, , \tag{7}$$

essendo $\theta_{ih}$ l'angolo degli assi delle $x_i$ e delle $x_h$ e la (6) prende in tal caso la forma:

$$d^m p_m = \begin{vmatrix} . & . & . \\ . & \omega_{d_i x \, d_h x} & . \\ . & . & . \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} . \tag{8}$$

Se in (8) si suppone $m = n$ si ottiene:

$$d^n p_n = \begin{vmatrix} . & . & . \\ . & \cos_{ih} & . \\ . & . & . \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} . & . & . \\ . & d_i x_h & . \\ . & . & . \end{vmatrix} , \tag{9}$$

la quale, quando si prendano per variabili indipendenti le stesse $x_1 \dots . x_n$, prende la nota forma:

$$d^n p_n = \begin{vmatrix} . & . & . \\ . & \cos_{ih} & . \\ . & . & . \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} dx_1 \dots . \, dx_n \, . \tag{10}$$

Ritornando al caso generale si osservi che se si fa $\Omega_{xx} = x_0^2 + K(x^2 + \dots$ $\dots + x_n^2) = 1$ le $x_0 \dots . x_n$ diventano le coordinate di Weierstrass. (Cfr. Killing, *Die Nicht-Euklidischen Raumformen*, 1885, pag. 71) e la (4) prende una forma particolare che è stata data dal Killing stesso (l. c., pag. 86) deducendola dalla teoria dell'equivalenza Euclidea (la quale è valida in ogni spazio abbastanza piccolo). Così pure un caso particolare di (5) l'ho trovato in una memoria di De Francesco sull'Idrodinamica non Euclidea. Ma nè il Killing, nè altri, io credo, hanno avuto occasione di pubblicare le formule generali (4) e (5).

**Ampiezza.** — Noi porremo d'ora innanzi $'p_m = K^{\frac{m}{2}} p_m$ e diremo $'p_m$ l'*ampiezza estensiva* della figura avente per estensione $p_m$; $'p_m$ è una quantità assoluta che può essere reale o immaginaria pura o complessa anche se $p_m$ è composto di punti reali. Volendo determinare *a priori* il segno di $(d^m{}'p_m)^2$, si indichino con $x^0, x^1, \dots x^n$ $n+1$ punti reali non coiperplanari di $S_n$ fuori dell'assoluto e del resto in posizione arbitraria; cambiando eventualmente il segno a tutti i coefficienti di $\Omega_{xx}$, si potrà supporre $\Omega_{x^0x^0} > o$. Allora colla sostituzione lineare reale $x_h = \sum_{o}^{n} {}_i \frac{x_i^h y_h}{\sqrt{\Omega_{x^o x^o}}}$ $(h = o, 1 \ldots . n)$ la quadrica $\Omega_{xx}$ si cangia nella quadrica $\Omega'_{yy} = \frac{\sum_{i,h} \Omega_{x^i x^h} y_i y_h}{\Omega_{x^o x^o}}$, e se $V$ è il numero dei termini negativi delle forme canoniche di $\Omega'_{yy}$ (e quindi anche di quelle di $\Omega_{xx}$), sarà $V$ (CESÀRO, *Anal. alg.*, pag. 75) il numero delle variazioni della successione 1, $A_o = 1$, $A_1, \ldots . A_n$, essendo in generale

$$A_m = \frac{1}{\Omega_{x^o x^o}^{m+1}} \begin{vmatrix} \Omega_{x^o x^o} & \ldots & \Omega_{x^o x^m} \\ \cdot\,\cdot & \cdots & \cdot\,\cdot \\ \Omega_{x^m x^o} & \ldots & \Omega_{x^m x^m} \end{vmatrix} \quad (m = o, 1, \ldots n) . \tag{11}$$

Nel caso ellittico la $\Omega_{x^o x^o} > o$ ci dà $V = o$ e quindi tutte le $A$ sono positive.

Nel caso iperbolico la $\Omega_{x^o x^o} > o$ ci dà $V = n$ ovvero $V = 1$ secondochè $x^o$ è interno o esterno alla quadrica $\Omega_{xx} = o$ (*). Se $V = n$, le $A_o, A_1 \ldots . A_n$ sono alternatamente positive e negative; se $V = 1$, vi è un valore minimo $\mu$ di $m$ pel quale le $A_\mu \ldots . A_n$ sono negative mentre le $A_o, A_1 \ldots . A_{\mu - 1}$ sono positive $(1 \leq \mu \leq n)$.

Osservando ora che per la (4) la $(d_m \cdot p_m)^2$ ha la stessa forma di $A_m$ e che per essere $A_m$ omogenea di grado 0 nelle $\Omega$ il segno di $\Omega_{x^o x^o}$ non ha influenza su quello di $A_m$, concludiamo:

Nel caso ellittico l'ampiezza è reale in porzioni reali di $S_n$;

Nel caso iperbolico e per porzioni reali $p_m$ di $S_n$ avviene che:

1.° se $p_m$ è interna all'assoluto, la sua ampiezza $\cdot p_m$ è reale o puramente immaginaria secondochè $m$ è pari o dispari;

2.° se invece $p_m$ è tutta esterna all'assoluto, l'elemento d'ampiezza $d^m \cdot p_m$ nell'intorno di un punto generico di $p_m$ può essere reale in alcune regioni di $p_m$ e in altre immaginario puro, secondochè (chiaramente) l'$S_m$ tangente a $p_m$ in quel punto è esterno o segante dell'assoluto; tali regioni sono separate fra loro da luoghi di punti in cui il detto $S_m$ è tangente all'assoluto e nei quali quindi $d^m p_m = 0$. Così $p_m$ può risultare reale, immaginaria pura o complessa.

3.° se $p_m$ è in parte esterna ed in parte interna all'assoluto ma connessa, vi saranno dei punti in cui $d^m \cdot p_m$ diventa infinita; il che non impedisce che l'integrale m-plo $\cdot p_m$ possa essere finito (reale, immaginario o complesso).

(*) Si osservi infatti che la forma canonica dell'assoluto data da Weierstrass: $W_{xx} = x_o^2 + K(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$ è positiva per $(x_1 = x_2 = \ldots x_n = o)$, sicchè per $K < o$ si ha $W_{xx} > o$ quando $x$ è interno all'assoluto. Allora $\Omega_{xx}$ sarà trasformabile con sostituzioni lineari reali in $\pm W_{xx}$ secondochè $x^o$ è interno o esterno all'assoluto, epperò, poichè $W_{xx}$ ha $n$ termini negativi e $-W_{xx}$ ne ha 1, sarà appunto $V = n$ nel 1.° caso e $V = 1$ nel 2.°.

**Ampiezze rettilinee e angolari.** — Per avere la distanza fra due punti $y, z$ basterà cercare la lunghezza $p_1$ del segmento compreso fra essi; per il che basterà nella forma (1) dell' elemento lineare porre $x = y + \lambda z$ e, prendendo $\lambda$ per variabile indipendente, integrare fra $o$ e $\infty$; così si trova facilmente:

$$\cos p_1 = \frac{\Omega_{yz}}{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}} . \tag{11}$$

Se noi cangiamo le $x$ nelle loro contragredienti $u$ e quindi $\Omega_{xx}$ nella sua aggiunta $\omega_{uu}$, l'ampiezza estensiva $p_m$ si cangerà nell'*ampiezza angolare* $q_m$. In particolare l'elemento d'angolo sarà dato da:

$$dq_1 = \frac{\sqrt{\omega_{uu}\,\omega_{dudu} - \omega_{udu}^2}}{\omega_{uu}} , \tag{12}$$

donde per l'angolo di due iperpiani $v, w$ si ottiene come in (11):

$$\cos q_1 = \frac{\omega_{vw}}{\sqrt{\omega_{vv}\omega_{ww}}} . \tag{13}$$

Se $n = 2$ la (13) dà l'angolo di due rette di un piano; se $x$ è il loro punto comune e $y$ e $z$ sono due altri punti distinti di $v$ e $w$ rispett., da (13) si ottiene:

$$\cos q_1 = \frac{\Omega_{xx}\Omega_{yz} - \Omega_{xy}\Omega_{xz}}{\sqrt{\{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2\}\{\Omega_{xx}\Omega_{zz} - \Omega_{xz}^2\}}} , \tag{14}$$

dalla quale a mezzo della (11) e simili si ottiene la formula fondamentale della trigonometria non Euclidea identica alla sferica quando i lati e gli angoli si misurino colle loro ampiezze.

Per la realità o immaginarietà delle ampiezze angolari valgono regole correlative a quelle stabilite per le ampiezze estensive.

È opportuno infine notare i seguenti due fatti:

1.° L'ampiezza estensiva di una figura eguaglia l'ampiezza angolare della sua reciproca-assoluta; in particolare $S_n$ ha l'ampiezza estensiva eguale all'angolare.

2.° L'ampiezza di una figura generata da punti di un $S_m$ subordinato ad $S_n$ eguaglia l'ampiezza della figura generata dagli $S_{n-m}$ che projettano i punti della prima figura dall' $S_{n-m-1}$ reciproco-assoluto del dato $S_m$.

**Avvertenza.** — La parola *ampiezza* ha qui un significato tutto differente da quello attribuitole dall'illustre prof. D'Ovidio nella celebre Memoria *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di curvatura costante* (Acc. dei Lincei 1876) ove non è trattata l'estensionimetria differenziale.

## § 3.°

## Estensione del tubo rettilineo infinitamente sottile.

Indicando qui con $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_{n-1}$ le $n$ variabili indipendenti, la (6) del § 2.° si scrive

$$d^n p_n = \frac{(x\; d_0x\; d_1x \dots d_{n-1}x)\sqrt{A}}{\Omega_{xx}^{\frac{n+1}{2}}} . \tag{1}$$

Supponiamo ora che le $x$ siano tali funzioni delle $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_{n-1}$ che restando costanti le $\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ il punto $x$ al variare di $\varphi_0$ descriva una retta; allora integrando le (1) rispetto a $\varphi_0$ si avrà l'estensione $d^{n-1}p_n$ del tubo generico di un sistema di $\infty^{n-1}$ tubi rettilinei di sezione $(n-1)$ volte infinitesima. Per scegliere le $x$ nel modo voluto siano $y$ e $z$ i punti estremi del tubo generico; allora le $y$ e le $z$ si dovranno supporre *date* funzioni delle sole $\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ e per ogni altro punto $x$ del segmento basterà prendere

$$\mu x = y + \varphi_0 \lambda z \tag{2}$$

(ove si è tralasciato l'indice comune alle $x, y, z$) intendendo che $\lambda$ sia una funzione omegenea di grado $-1$ nelle $z$ e di grado 1 nelle $y$ sempre finita e non nulla nel campo di variabilità delle $\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ e del resto arbitrariamente fissata, mentre $\mu$ è un coefficiente indeterminato di proporzionalità. Si avrà intanto

$$d^{n-1}p_n = \int_0^\infty \frac{d^n p_n}{d\varphi_0}\, d\varphi_0 , \tag{3}$$

ed io voglio provare che, *nell'ipotesi* (2), *la quadratura* (3) *è eseguibile elementarmente.*

Differenziando la (2) rispetto a $\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$, avremo:

$$\left.\begin{aligned} &\mu d_0 x + x d_0 \mu = \lambda z d\varphi_0 , \\ &\mu d_i x + x d_i \mu = d_i y + \varphi_0 \lambda d_i z + \varphi_0 z d_i \lambda \qquad (i = 1, 2, \dots (n-1)) \end{aligned}\right\} . \tag{4}$$

Dalle (2) e (4) otteniamo intanto

$$\begin{aligned} \mu^{n+1}(x\; d_0x\; d_1x \dots d_{n-1}x) &= (\mu x\; \mu d_0 x\; \mu d_1 x \dots \mu d_{n-1} x) = (\mu x\; \mu d_0 x + x d_0 \mu \dots \mu d_{n-1} x + x d_{n-1}\mu) = \\ &= (y + \varphi_0 \lambda z\;\; \lambda z d\varphi_0\;\; d_1 y + \varphi_0 \lambda d_1 z + \varphi_0 z d_1 \lambda \dots d_{n-1} y + \varphi_0 \lambda d_{n-1} z + \varphi_0 z d_{n-1}\lambda) = \\ &= (y\;\; z\;\; d_1 y + \varphi_0 \lambda d_1 z \dots d_{n-1} y + \varphi_0 \lambda d_{n-1} z)\, \lambda d\varphi_0 . \end{aligned} \tag{5}$$

Poniamo ora per brevità $\nu = \varphi_o \lambda$, donde $d_o \nu = \lambda d\varphi_o$; allora, se scriviamo $d\nu$ in luogo di $d_o\nu$, la (5) ci darà

$$\mu^{n+1}(x \; d_o x \; \ldots \; d_{n-1} x)\sqrt{\Delta} = (y \; z \; d_1 y + \nu d_1 z \; \ldots \; d_{n-1} y + \nu d_{n-1} z)\sqrt{\Delta}\, d\nu \,. \tag{6}$$

Sviluppando poi il secondo membro di (6) secondo le potenze di $\nu$ avremo infine un risultato della forma:

$$\mu^{n+1}(x \; d_o x \; \ldots \; d_{n-1} x)\sqrt{\Delta} = \left\{ A_o + A_1 \nu + \ldots + A_{n-1} \nu^{n-1} \right\} d\nu \,, \tag{7}$$

ove

$$A_o = (y \; z \; d_1 y \; \ldots \; d_{n-1} y)\sqrt{\Delta} \;, \quad A_1 = \sum_1^n{}_i \frac{\partial A_o}{\partial (d_i y)}\, d_i z \,,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \sum_1^n{}_i \frac{\partial A_1}{\partial (d_i y)}\, d_i z \,, \text{ ecc.} \,, \tag{8}$$

essendo ben chiaro il significato delle derivazioni simboliche qui comparenti.

Da (2) ricaviamo inoltre

$$\mu^{n+1} \Omega_{xx}^{\frac{n+1}{2}} = \left\{ \Omega_{yy} + 2\nu\Omega_{yz} + \nu^2 \Omega_{zz} \right\}^{\frac{n+1}{2}} . \tag{9}$$

Da (7) e (9) ricaviamo infine per divisione

$$d^n p_n = \frac{A_o + A_1\nu + \ldots + A_{n-1}\nu^{n-1}}{\left\{ \Omega_{yy} + 2\nu\Omega_{yz} + \nu^2 \Omega_{zz} \right\}^{\frac{n+1}{2}}}\, d\nu \,, \tag{10}$$

la quale è manifestamente integrabile elementarmente rispetto a $\nu$.

---

Si può tuttavia indicare un metodo peculiarmente adatto alla integrazione della (10). Avendosi da (2)

$$\mu x = y + \nu z \,, \tag{11}$$

ne ricaveremo

$$\mu^2 \left\{ \Omega_{xx}\Omega_{zz} - \Omega_{xz}^2 \right\} = \left\{ \Omega_{yy} + 2\nu\Omega_{yz} + \nu^2\Omega_{zz} \right\} \Omega_{zz} - \left\{ \Omega_{yz} + \nu\Omega_{zz} \right\}^2 = \Omega_{yy}\Omega_{zz} - \Omega_{yz}^2 \,. \tag{2}$$

Se dunque $\rho$ ed $r$ sono le lunghezze dei seguenti $zx, zy$ risp., si avrà

$$\cot p = \frac{\Omega_{xz}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{zz} - \Omega_{xy}^2}} = \frac{\Omega_{yz} + \nu\Omega_{zz}}{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz} - \Omega_{yz}^2}} \;, \quad \cot r = \frac{\Omega_{yz}}{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz} - \Omega_{yz}^2}} \,,$$

donde

$$(\cot\cdot\rho - \cot\cdot r)\,\frac{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz} - \Omega^2_{yz}}}{\Omega_{zz}} = \nu \,.=.\, \nu = (\cot\cdot\rho - \cot\cdot r)\operatorname{sen}\cdot r\,\Omega_{yy}^{\frac{1}{2}}\,\Omega_{zz}^{-\frac{1}{2}}\;;$$

sicché, facendo

$$\lambda = \Omega_{yy}^{\frac{1}{2}}\,\Omega_{zz}^{-\frac{1}{2}}\,,$$

si avrà

$$\nu = \lambda\,\varphi_0 = \frac{\operatorname{sen}\cdot(r-\rho)}{\operatorname{sen}\cdot\rho}\,\Omega_{yy}^{\frac{1}{2}}\,\Omega_{zz}^{-\frac{1}{2}}\,, \tag{13}$$

donde

$$d\nu = -\Omega_{yy}^{\frac{1}{2}}\,\Omega_{zz}^{-\frac{1}{2}}\,\frac{\operatorname{sen}\cdot r}{\operatorname{sen}^2\cdot\rho}\,d\cdot\rho\,.$$

Da queste avremo intanto

$$A_i\,\nu^i\,d\nu = -\frac{A_i}{\Omega_{yy}^{\frac{n-i}{2}}\,\Omega_{zz}^{\frac{i+1}{2}}} \times \frac{\Omega_{yy}^{\frac{n+1}{2}}\operatorname{sen}\cdot r}{\operatorname{sen}^{n+1}\cdot\rho} \times \operatorname{sen}^i\cdot(r-\rho)\operatorname{sen}^{n-i-1}\cdot\rho\,d\cdot\rho\,. \tag{14}$$

Inoltre, essendo per la (12)

$$\frac{\operatorname{sen}\cdot r}{\operatorname{sen}\cdot\rho}\sqrt{\Omega_{yy}} = \frac{\sqrt{\Omega_{yy}\,\Omega_{zz} - \Omega^2_{yz}}}{\sqrt{\Omega_{yy}\,\Omega_{zz}}} \times \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{zz}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{zz} - \Omega^2_{zz}}} \times \sqrt{\Omega_{yy}} =$$

$$= \mu\sqrt{\Omega_{xx}} = \left\{\Omega_{yy} + 2\nu\Omega_{yz} + \nu^2\,\Omega_{zz}\right\}^{\frac{1}{2}}\,,$$

la (14) ci darà

$$\int_0^\infty \frac{A_i\,\nu^i\,d\nu}{\left\{\Omega_{yy} + 2\nu\Omega_{yz} + \nu^2\,\Omega_{zz}\right\}^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{A_i}{\Omega_{yy}^{\frac{n-i}{2}}\,\Omega_{zz}^{\frac{i+1}{2}}\operatorname{sen}^n\cdot r}\int_0^{\cdot r}\operatorname{sen}^i\cdot(r-\rho)\operatorname{sen}^{n-i-1}\cdot\rho\,d\cdot\rho\,, \tag{15}$$

giacchè da (13) risulta $\rho = o$ per $\nu = \infty$ e $\rho = r$ per $\nu = o$ e i limiti si debbono invertire a cagione del segno — che compare in (14).

Poniamo ora per maggiore semplicità e simmetria

$$B_{\alpha,\beta} = \frac{A_\beta}{\Omega_{\nu\nu}^{\frac{\alpha+1}{2}} \Omega_{\mu\mu}^{\frac{\beta+1}{2}}},$$

$$V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta)} = \int_0^{\cdot r} \operatorname{sen}^\alpha \cdot (r-\rho) \operatorname{sen}^\beta \cdot \rho \, d \cdot \rho \qquad (\alpha+\beta = n-1 ; \alpha, \beta = 0, 1, \ldots (n-1)) . \tag{16}$$

Allora il secondo membro di (15) diverrà per $i = \beta$: $\frac{V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta)}}{\operatorname{sen}^n \cdot r} B_{\alpha\beta}$, e la (3) per la (10) ci darà:

$$d^{n-1} \cdot p_n = \frac{V_{\cdot r}^{(o,n-1)}}{\operatorname{sen}^n \cdot r} B_{o,n-1} + \frac{V_{\cdot r}^{1,n-2}}{\operatorname{sen}^n \cdot r} B_{1,n-2} + \ldots + \frac{V_{\cdot r}^{(n-1,o)}}{\operatorname{sen}^n \cdot r} B_{n-1,o} . \tag{17}$$

L' integrale $V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta)}$ si può chiaramente ottenere con metodi elementari in termini finiti; noi riterremo perciò $V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta)}$ una funzione nota di $\cdot r$ che diremo *vettoriale dei gradi $\alpha, \beta$ di $\cdot r$*. È facile riconoscere che

$$V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta)} = V_{\cdot r}^{(\beta,\alpha)} . \tag{18}$$

Diremo invece *rapporto vettoriale* la quantità $\frac{V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta)}}{\operatorname{sen}^n \cdot r}$.

Siccome

$$\lim_{K=o} \frac{V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta)}}{\operatorname{sen}^n \cdot r} = \frac{1}{r^n} \int_0^r (r-\rho)^\alpha \rho^\beta \, d\rho = \frac{\alpha ! \beta !}{n!}, \tag{19}$$

(come si vede subito con successive integrazioni per parti), così si conclude che:

$$\text{il rapporto vettoriale Euclideo} = \frac{\alpha ! \beta !}{n!}, \tag{20}$$

cioè è indipendente da $r$.

§ 4.

## Tubi rettilinei imprimitivi e primitivi Calcolo intrinseco dei primitivi.

Un tubo di sezione generica $n-1$ volte infinitesima si dirà di *specie* $n-1$; occorrono $\infty^{n-1}$ tubi di specie $n-1$ per empire une spazio finito ad $n$ dimensioni. Affinchè dunque un sistema di $\infty^{n-1}$ tubi rettilinei di specie $n-1$ di un $S_n$ sia determinato bisogna che le coordinate projettive $y, z$ degli estremi dell'*asse* di un tubo generico siano tali funzioni delle variabili $\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$ che le coppie di punti $yz$ siano $\infty^{n-1}$; vale a dire se $\alpha$ variabili $\varphi$ entrano soltanto nella $y$, $\beta$ soltanto nella $z$ e se $\gamma$ variabili $\varphi$ sono comuni alla $y$ e alla $z$, bisogna che sia $\alpha+\beta+\gamma=n-1$.

Siano $L, M$ i luoghi ad $\alpha+\gamma$ e $\beta+\gamma$ dimensioni descritti rispettivamente da $y$ e $z$ al variare delle $\varphi$; allora per ogni sistema di valori delle $\gamma$ variabili $\varphi$ comuni alle funzioni $y$ e $z$ resteranno fissate su $L$ ed $M$ due zone $L'$, $M'$ ad $\alpha$ e $\beta$ dimensioni fra loro corrispondenti in modo che le $\infty^{\alpha+\beta}$ congiungenti rettilinee di ogni punto di $L'$ con ogni punto di $M'$ appartengono tutte al sistema degli $\infty^{n-1}$ assi dei dati tubi di specie $n-1$ e formano un sistema da dirsi di *imprimitività* del sistema totale, inquantochè ogni trasformazione puntuale che cangi il sistema totale in se stesso ed $L$ ed $M$ in se stessi deve pure cangiare fra loro i detti subsistemi. Si avranno $\infty^{\gamma}$ sistemi di imprimitività e i corrispondenti *tubi di specie* $n-1$ *si diranno* $\gamma$ *volte imprimitivi;* se $\gamma=o$ i tubi saranno da dirsi *primitivi.*

Gli assi di un sistema di imprimitività infinitamente vicini a un asse generico del sistema formano un tubo *primitivo* di specie $\alpha+\beta$ che genera il tubo di specie $n-1$ $\gamma$ volte imprimitivo come un punto genera uno spazio a $\gamma$ dimensioni $\gamma$ volte infinitesimo. Il tubo primitivo generatore del tubo $\gamma$ volte imprimitivo ha alle due estremità due *strozzature* ad $\alpha$ e $\beta$ dimensioni ed $\alpha$ e $\beta$ volte infinitesime che possono considerarsi iperpiane, ed è formato da tutte le congiungenti dei punti di tali due piccole falde iperpiane; le quali, poichè per un punto generico non possono passare due di dette congiungenti, staranno in una determinata ed unica falda iperplanare ad $\alpha+\beta+1$ $(=n-\gamma)$ dimensioni, rettilinea ed $\alpha+\beta$ volte infinitamente sottile contenente tutto il tubo. Le due strozzature del tubo primitivo generatore dell'imprimitivo generano poi le strozzature ad $\alpha+\gamma$ e $\beta+\gamma$ dimensioni, $\alpha+\gamma$ e $\beta+\gamma$ volte infinitesime epperò iperplanari.

**Tubi primitivi di specie** $n-1$. — Ritenendo che le $\varphi_1 \ldots \varphi_\alpha$ entrino nelle $y$ e non nelle $z$, saranno nulle le $d_1 z \ldots d_\alpha z$; e poichè, per l'ipotesi $\gamma=o$, le rimanenti $\varphi_{\alpha+1} \ldots \varphi_{n-1}$ entrano nelle $z$ e non nelle $y$, saranno nulle le $d_{\alpha+1} y \ldots d_{n-1} y$.

Allora il determinante $(y, z, d_1 y + \nu d_1 z, \ldots d_{n-1} y + \nu d_{n-1} z)$ si ridurrà a $(y, d_1 y \ldots d_\alpha y, z, d_{\alpha+1} z \ldots d_{n-1} z)\, \nu^\beta$; perciò tutte le $B$ del § 3.° si ridurranno a zero eccetto $B_{\alpha\beta}$ che avrà forma monomia, cioè si avrà:

$$B_{\alpha,\beta} = \frac{(y, d_1 y \ldots d_\alpha y, z, d_{\alpha+1} z \ldots d_{n-1} z) \sqrt{\Delta}}{\Omega_{yy}^{\frac{\alpha+1}{2}} \; \Omega_{zz}^{\frac{\beta+1}{2}}}; \tag{1}$$

sicchè l'ampiezza $d^{n-1} \cdot p_n$ del tubo rettilineo sarà data (secondo la (17), l. c.) dalla formula monomia:

$$d^{n-1} \cdot p_n = \frac{1^{-(\alpha,\beta)} \cdot r}{\operatorname{sen}^n \cdot r} B_{\alpha,\beta}. \tag{2}$$

Occorre ora interpretare geometricamente il fattore $B_{\alpha,\beta}$. *Allo scopo indichiamo con $d^\alpha \cdot s$ l'ampiezza estensiva della strozzatura $y$, con $d^\beta \sigma$ l'ampiezza angolare apparente della strozzatura $z$ vista dall'* $S_\alpha$ *che contiene la strozzatura $y$, e infine con $a$ la distanza del punto $z$ del detto* $S_\alpha$. *Dico che sarà*

$$B_{\alpha,\beta} = d^\alpha \cdot s \; d^\beta \sigma \operatorname{sen}^{\beta+1} \cdot a. \tag{3}$$

Dim. — Intanto si avrà (I.ª § 2)

$$d^\alpha \cdot s = \frac{\begin{vmatrix} \Omega_{yy} & \Omega_{y\,d_1 y} & \ldots & \Omega_{y\,d_\alpha y} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \Omega_{d_\alpha y\, y} & \Omega_{d_\alpha y\, d_1 y} & \ldots & \Omega_{d_\alpha y\, d_\alpha y} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{yy}^{\frac{\alpha+1}{2}}}. \tag{4}$$

Se $\eta$ è l'$S_\alpha$ tangente in $y$ al luogo $L_y$, cioè se $\eta$ è l'$S_\alpha$ passante per gli $\alpha + 1$ punti $y, y + d_1 y, \ldots y + d_\alpha y$, e se $\zeta$ è l'$S_\beta$ tangente in $z$ al luogo $L_z$, cioè passante pei punti $z, z + d_{\alpha+1} z, \ldots z + d_{n-1} z$, per definizione $d^\beta \sigma$ sarà l'ampiezza angolare della stella formata dagli $S_{\alpha+1}$ passanti per $\eta$ e projettanti i punti dell'intorno di $z$ in $\zeta$; segando tale sistema di $S_{\alpha+1}$ coll'$S_\beta$ $\eta^1$ polare assoluto di $y$, si avrà sopra $\eta^1$ un punto $z^1$ (projezione di $z$ da $\eta$), l'intorno del quale (Iª § 2.°) avrà un'ampiezza estensiva eguale a $d^\beta \sigma$. Per definizlone si ha poi:

$$\Omega_{yz^1} = o \; ; \; \Omega_{d_1 y\, z^1} = o \;, \; \ldots . \; \Omega_{d_\alpha y\, z^1} = o. \tag{5}$$

Queste differenziate rispetto a $\varphi_{\alpha+1}, \dots \varphi_{n-1}$, coll' osservare che le $y$ non contengono tali variabili, ci danno poi anche

$$\left.\begin{array}{l}\Omega_{y\, d_{\alpha+1} z^1} = o \;,\quad \Omega_{d_1 y\, d_{\alpha+1} z^1} = o \;,\quad \dots\quad \Omega_{d_\alpha y\, d_{\alpha+1} z^1} = o \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Omega_{y\, d_{n-1} z^1} = o \;,\quad \Omega_{d_1 y\, d_{n-1} z^1} = o \;,\quad \dots\quad \Omega_{d_\alpha y\, d_{n-1} z^1} = o \,.\end{array}\right\} \tag{6}$$

E per l' osservazione fatta sarà

$$d^\beta z = \frac{\begin{vmatrix} \Omega_{z^1 z^1} & \Omega_{z^1 d_{\alpha+1} z^1} & \dots & \Omega_{z^1 d_{n-1} z^1} \\ \Omega_{d_{\alpha+1} z^1 z^1} & \Omega_{d_{\alpha+1} z^1 d_{\alpha+1} z^1} & \dots & \Omega_{d_{\alpha+1} z^1 d_{n-1} z^1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Omega_{d_{n-1} z^1 z^1} & \Omega_{d_{n-1} z^1 d_{\alpha+1} z^1} & \dots & \Omega_{d_{n-1} z^1 d_{n-1} z^1} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{z^1 z^1}^{\frac{\beta+1}{2}}} \,. \tag{7}$$

Ciò posto si osservi che $z^1$ deve essere per definizione un punto dell' $S_{\alpha+1}$ passante pei punti $y$, $y + d_1 y$, $\dots$ $y + d_\alpha y$, $z$, cioè si deve avere con convenienti valori dei coefficienti $\lambda_o$, $\lambda_1$, $\dots$ $\lambda_\alpha$, $\mu$, $\nu$:

$$\nu z = \lambda_o y + \lambda_1 d_1 y + \dots + \lambda_\alpha d_\alpha y + \mu z^1 \,. \tag{8}$$

e i rapporti $\frac{\lambda_o}{\nu}$, $\frac{\lambda_1}{\nu}$ $\dots$ $\frac{\lambda_\alpha}{\nu}$ si determinerebbero colle (5).

Da (8) differenziando rispetto a $\varphi_{\alpha+1} \dots \varphi_{n-1}$ si ha, poichè le $y$ non contengono tali variabili,

$$\nu d_i z + z d_i \nu = y d_i \lambda_o + d_1 y\, d_i \lambda_1 + \dots + d_\alpha y\, d_i \lambda_\alpha + \mu d_i z^1 + z^1 d_i \mu \qquad (i = \alpha + 1, \dots n - 1). \tag{9}$$

Da (8) e (9) ricaviamo poi:

$$\begin{aligned}\nu^{\beta+1} ( y, d_1 y \dots d_\alpha y, z, d_{\alpha+1} z \dots d_{n-1} z ) &= ( y, d_1 y \dots d_\alpha y, \nu z, \nu d_{\alpha+1} z \dots \nu d_{n-1} z ) = \\ &= ( y, d_1 y \dots d_\alpha y, \nu z, \nu d_{\alpha+1} z + z d_{\alpha+1} \nu \dots \nu d_{n-1} z + z d_{n-1} \nu ) = \\ &= ( y, d_1 y, \dots d_\alpha y, \lambda_o y + \dots + \lambda_\alpha d_\alpha y + \mu z^1, \dots \dots y d_{n-1} \lambda_o + \\ &+ d_1 y\, d_{n-1} \lambda_1 + \dots + d_\alpha y\, d_{n-1} \lambda_\alpha + \mu d_{n-1} z^1 + z^1 d_{n-1} \mu ) = \\ &= ( y, d_1 y_1, \dots d_\alpha y, \mu z^1, \mu d_{\alpha+1} z^1 + z^1 d_{\alpha+1} \mu, \dots \mu d_{n-1} z^1 + z^1 d_{n-1} \mu ) = \\ &= ( y, d_1 y_1 \dots d_\alpha y, z^1, d_{\alpha+1} z^1, \dots d_{n-1} z^1 ) \mu^{\beta+1} \,.\end{aligned} \tag{10}$$

La (10) per la (1) ci dà

$$B_{\alpha,\beta}=\frac{(y,d_1 y,\ldots d_\alpha y,z^1,d_{\alpha+1}z^1,\ldots d_{n-1}z^1)\sqrt{\Delta}}{\Omega_{yy}^{\frac{\alpha+1}{2}}\;\Omega_{z^1z^1}^{\frac{\beta+1}{2}}}\left(\frac{\mu^2}{\nu^2}\frac{\Omega_{z^1z^1}}{\Omega_{zz}}\right)^{\frac{\beta+1}{2}} . \tag{11}$$

Ora il quadrato del determinante del secondo membro di (11) moltiplicato per $\Delta$ dà il determinante

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc}
\Omega_{yy} & \Omega_{y\,d_1y} & \ldots & \Omega_{y\,d_\alpha y} & \Omega_{y\,z^1} & \Omega_{y\,d_{\alpha+1}z^1} & \ldots & \Omega_{y\,d_{n-1}z^1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\Omega_{d_\alpha y\,y} & \Omega_{d_\alpha y\,d_1y} & \ldots & \Omega_{d_\alpha y\,d_\alpha y} & \Omega_{d_\alpha y\,z^1} & \Omega_{d_\alpha y\,d_{\alpha+1}z^1} & \ldots & \Omega_{d_\alpha y\,d_{n-1}z^1} \\
\hline
\Omega_{z^1y} & \Omega_{z^1\,d_1y} & \ldots & \Omega_{z^1\,d_\alpha y} & \Omega_{z^1z^1} & \Omega_{z^1\,d_{\alpha+1}z^1} & \ldots & \Omega_{z^1\,d_{n-1}z^1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\Omega_{d_{n-1}z^1y} & \Omega_{d_{n-1}z^1\,d_1y} & \ldots & \Omega_{d_{n-1}z^1\,d_\alpha y} & \Omega_{d_{n-1}z^1\,z^1} & \Omega_{d_{n-1}z^1\,d_{\alpha+1}z^1} & \ldots & \Omega_{d_{n-1}z^1\,d_{n-1}z^1}
\end{array}\right|$$

il quale, avendo due matrici rettangolari formate da elementi tutti nulli (a cagione delle (5) e (6)), si riduce al prodotto dei due determinanti comparenti in (4) e (7), e così la (11) per le (4) e (7) si scrive

$$B_{\alpha,\beta}=d^{\alpha}s\;d^{\beta}\sigma\times\left(\frac{\mu^2}{\nu^2}\frac{\Omega_{z^1z^1}}{\Omega_{zz}}\right)^{\frac{\beta+1}{2}} . \tag{12}$$

Ora da (8) si ricava a cagione delle (5)

$$\nu\,\Omega_{z^1z}=\mu\,\Omega_{z^1z^1} . \tag{13}$$

Eliminando $\frac{\mu}{\nu}$ fra (12) e (13) abbiamo dunque

$$B_{\alpha,\beta}=d^{\alpha}s\;d^{\beta}\sigma\cdot\left(\frac{\Omega^2_{z^1z}}{\Omega_{zz}\,\Omega_{z^1z^1}}\right)^{\frac{\beta+1}{2}} . \tag{14}$$

Se $t$ è il piede della perpendicolare calata da $z$ sopra $\eta$ la retta $tz$ sarà quella (unica) retta che passa per $z$ e si appoggia ad $\eta$ ed $\eta^1$ e perciò sarà la stessa retta $zz^1$; inoltre il segmento $zz^1$ avrà un'ampiezza complementare dell'ampiezza del segmento $(zt)=a$; sarà dunque

$$\frac{\Omega_{z^1z}}{\sqrt{\Omega_{zz}\,\Omega_{z^1z^1}}}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\operatorname{sen} a . \tag{15}$$

Da (14) e (15) risulta ora manifestamente la (3). C. D. D.

**Osservazione 1.ª** — Da (2) e (3) otteniamo

$$d^{n-1} \cdot p_n = \frac{F_{\cdot r}^{(\alpha,\beta)}}{\operatorname{sen}^n \cdot r} \operatorname{sen}^{\beta+1} \cdot a \; d^\alpha \cdot s \; d^\beta \sigma \; ; \tag{16}$$

dividendo questa per $K^{\frac{n}{2}}$ e passando al limite per $K = o$, avremo pel caso Euclideo la formula (cfr. § 3.°)

$$d^{n-1} p_n = \frac{\alpha! \, \beta!}{n!} a^{\beta+1} d^\alpha s \; d^\beta \sigma \, . \tag{17}$$

**Osservazione 2.ª** — Potendosi in (16) o (17) scambiare $y$ con $z$, avremo così due formule pel calcolo intrinseco del tubo primitivo.

**Osservazione 3.ª** — Se $\alpha = o$, $\beta = n - 1$, il tubo è una piramide col vertice nel punto fisso $y$ e l'angoloide in $y$ $d^{n-1}\sigma$; allora poi $a = r$ e le (16) e (17) diventano

$$d^{n-1} \cdot p_n = F_{\cdot r}^{(o,\, n-1)} d^{n-1} \sigma \, , \tag{18}$$

$$d^{n-1} p_n = \frac{r^n \, d^{n-1} \sigma}{n} \, . \tag{19}$$

Se invece $\alpha = n - 1$, $\beta = o$, il tubo è una piramide col vertice nel punto fisso $z$, la base $d^{n-1} s$ e l'altezza $a$; e le (16) e (17) ci dànno

$$d^{n-1} \cdot p_n = \frac{F_{\cdot r}^{(n-1,\, o)}}{\operatorname{sen}^n \cdot r} \operatorname{sen} \cdot a \; d^{n-1} \cdot s \, , \tag{20}$$

$$d^{n-1} p_n = \frac{a \, d^{n-1} s}{n} \, . \tag{21}$$

Non mi risulta che le (16) e (17) siano state finora osservate.

**Osservazione 4.ª** — La formula (1) si può scrivere anche

$$B_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\Omega_{yy}^{\frac{\alpha+1}{2}} \, \Omega_{zz}^{\frac{\beta+1}{2}}} \begin{vmatrix} \Omega_{yy} & \Omega_{y d_1 y} & \ldots \Omega_{y d_\alpha y} & \Omega_{yz} & \Omega_{y d_{\alpha+1} z} & \ldots \Omega_{y d_{\alpha+\beta} z} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Omega_{d_{\alpha+\beta} z\, y} & \Omega_{d_{\alpha+\beta} z\, d_1 y} & \ldots \Omega_{d_{\alpha+\beta} z\, d_\alpha y} & \Omega_{d_{\alpha+\beta} z\, z} & \Omega_{d_{\alpha+\beta} z\, d_{\alpha+1} z} & \ldots \Omega_{d_{\alpha+\beta} z\, d_{\alpha+\beta} z} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} , \tag{22}$$

e in questa forma è valida anche se $\alpha + \beta < n - 1$, cioè anche se il tubo è contenuto in un $S_{\alpha+\beta+1}$ subordinato ad $S_n$. Se per es. $\alpha + \beta = n - 2$ e si pone qualunque sia $x$

$$u_x = (y \, , d_1 y \, , \ldots \, d_\alpha y \, , z \, , d_{\alpha+1} z \, , \ldots \, d_{n-2} z \, , x) \, , \tag{23}$$

indicando con $\omega_{uu}$ la forma aggiunta di $\Gamma_{xx}$, la (22) si potrà scrivere

$$B_{\alpha,\beta} = \frac{\omega_{uu}^{\frac{1}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{yy}^{\frac{\alpha+1}{2}} \Omega_{zz}^{\frac{\beta+1}{2}}} = \frac{\begin{vmatrix} o & -u_i \\ u_j & \Omega_{ij} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{yy}^{\frac{\alpha+1}{2}} \Omega_{zz}^{\frac{\beta+1}{2}}} \text{ (in forma abbreviata).} \tag{24}$$

L'equazione $u_x = o$ è poi quella dell'iperpiano che contiene il tubo.

§ 5.

## Calcolo intrinseco dei tubi una volta imprimitivi. Tubi trapezoidali.

Sia $\varphi_1$ la variabile unica di cui sono funzioni ad un tempo le $y$ e le $z$ e siano per esempio $\varphi_2 \ldots \varphi_{\alpha+1}$ le variabili che entrano soltanto nelle $y$: allora saranno $\varphi_{\alpha+2} \ldots \varphi_{n-1}$ quelle che entrano soltanto nelle $z$; e l'ampiezza $d^{n-1} p_n$ del tubo imprimitivo sarà data da:

$$d^{n-1} p_n = \int_{\infty}^{o} \frac{(y, d_2 y, \ldots d_{\alpha+1} y, z, d_{\alpha+2} z \ldots d_{n-1} z, d_1 y + \nu d_1 z)\, \nu^{\beta} \sqrt{\Delta}}{\left\{ \Omega_{yy} + 2\nu\, \Omega_{yz} + \nu^2\, \Omega_{zz} \right\}^{\frac{n+1}{2}}}\, d\nu\,. \tag{1}$$

Se dunque si pone:

$$\left.\begin{aligned} B_{\alpha+1,\beta} &= \frac{(y, d_2 y, \ldots d_{\alpha+1} z, d_{\alpha+2} z, \ldots d_{n-1} z, d_1 y) \sqrt{\Delta}}{\Omega_{yy}^{\frac{\alpha+2}{2}} \Omega_{zz}^{\frac{\beta+1}{2}}}, \\ B_{\alpha,\beta+1} &= \frac{(y, d_2 y, \ldots d_{\alpha+1} y, z, d_{\alpha+2} z \ldots d_{n-1} z, d_1 z) \sqrt{\Delta}}{\Omega_{yy}^{\frac{\alpha+1}{2}} \Omega_{zz}^{\frac{\beta+2}{2}}}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

alla (1) si potrà (§ 3.° 17) dare la forma

$$d_{n-1} p_n = \frac{V_{\cdot r}^{(\alpha+1,\beta)}}{\operatorname{sen}_n r} \cdot B_{\alpha+1,\beta} + \frac{V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta+1)}}{\operatorname{sen}_n r} B_{\alpha,\beta+1}\,. \tag{3}$$

Per interpretare geometricamente la (3) si ponga qualunque sia $x$

$$u_x = (y, d_2 y, \ldots d_{\alpha+1} y, z, d_{\alpha+2} z, \ldots d_{n-1} z, x)\,; \tag{4}$$

allora $u_x = o$ sarà l'iperpiano mobile contenente il tubo generatore del dato tubo imprimitivo; inoltre le (2) si potranno scrivere

$$B_{\alpha+1,\beta} = \frac{u_{d_1 y}}{\omega_{uu}^{\frac{1}{2}}\,\Omega_{yy}^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\omega_{uu}^{\frac{1}{2}}\,\Delta^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{yy}^{\frac{\alpha+1}{2}}\,\Omega_{zz}^{\frac{\beta+1}{2}}}\ ,\quad B_{\alpha,\beta+1} = \frac{u_{d_1 z}}{\omega_{uu}^{\frac{1}{2}}\,\Omega_{zz}^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\omega_{uu}^{\frac{1}{2}}\,\Delta^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{yy}^{\frac{\alpha+1}{2}}\,\Omega_{zz}^{\frac{\beta+1}{2}}}\ . \tag{5}$$

Ora sia $d^{n-2}\cdot g_{n-1}$ l'ampiezza del tubo primitivo generatore; allora per le (2) e (24) del § 4, si avrà

$$d^{n-2}\cdot g_{n-1} = \frac{V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta)}}{\operatorname{sen}^{n-1}\cdot r} \times \frac{\omega_{uu}^{\frac{1}{2}}\,\Delta^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{yy}^{\frac{\alpha+1}{2}}\,\Omega_{zz}^{\frac{\beta+1}{2}}} \tag{6}$$

Per le (5) e (6) la (3) si scrive

$$d^{n-1}\cdot p_n = \left\{ \frac{V_{\cdot r}^{(\alpha+1,\beta)}}{V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta)}\operatorname{sen}\cdot r} \times \frac{u_{d_1 y}}{\omega_{uu}^{\frac{1}{2}}\,\Omega_{yy}^{\frac{1}{2}}} + \frac{V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta+1)}}{V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta)}\operatorname{sen}\cdot r} \times \frac{u_{d_1 z}}{\omega_{uu}^{\frac{1}{2}}\,\Omega_{zz}^{\frac{1}{2}}} \right\} d^{n-2}\cdot g_{n-1}\ . \tag{7}$$

Ora, se $h$ è la distanza del punto qualunque $x$ dall'iperpiano $u$, si ha notoriamente

$$\operatorname{sen}\cdot h = \frac{u_x}{\omega_{uu}^{\frac{1}{2}}\,\Omega_{xx}^{\frac{1}{2}}}\ ; \tag{8}$$

se dunque $d\cdot a$, $d\cdot b$ sono le ampiezze infinitesime della distanza da $u$ dei punti $y + d_1 y$, $z + d_1 z$ si avrà, poichè $u_y = o$, $u_z = o$,

$$d\cdot a = \frac{u_{d_1 y}}{\omega_{uu}^{\frac{1}{2}}\,\Omega_{yy}^{\frac{1}{2}}}\ ,\quad d\cdot b = \frac{u_{d_1 z}}{\omega_{uu}^{\frac{1}{2}}\,\Omega_{zz}^{\frac{1}{2}}}\ ; \tag{9}$$

per mezzo delle quali la (7) prende la forma intrinseca

$$d^{n-1}\cdot p_r = \left\{ \frac{V_{\cdot r}^{(\alpha+1,\beta)}}{V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta)}\operatorname{sen}\cdot r}\, d\cdot a + \frac{V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta+1)}}{V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta)}\operatorname{sen}\cdot r}\, d\cdot b \right\} d^{n-2}\cdot g_{n-1}\ . \tag{10}$$

---

**Tubo trapezoidale.** — Così chiameremo *un tubo una volta imprimitivo quando sia generato da un tubo primitivo piramidale in modo che l'asse del tubo generatore descriva una sviluppabile e mantenga una inclinazione costante colla linea descritta dal vertice.*

Il moto dell'iperpiano $u$ contenente la piramide generatrice può comporsi di due successive rotazioni infinitesime di $u$: una, che diremo *normale*, intorno all'$S_{n-2}$ giacente in esso e polare-assoluto del vertice $y$ della piramide generatrice; e l'altra di $u$ su se stesso intorno all'$S_{n-3}$ giacente in esso e polare-assoluto della projezione normale su $u$ dell'elemento rettilineo descritto da $y$ nello spazio.

In entrambi i moti resta invariato il piano e l'angolo che una retta di $u$ passante per $y$ forma colla retta descritta da $y$; in particolare *l'altezza* (in posizione e lunghezza) della piramide generatrice descrive nel moto normale un quadrilatero piano infinitamente sottile che è *un tubo trapezoidale di 1.ª specie* e che diremo la *sezione normale* del tubo trapezoidale di specie $n-1$ dato quando $n > 2$.

**Teorema.** — *Se $d^{\cdot}\tau_2$ è l'ampiezza estensiva (areale) della sezione normale di un dato tubo trapezoidale di ampiezza estensiva $d^{n-1\cdot}p_n$, e se $d^{n-2\cdot}s_{n-2}$ è l'ampiezza della base della piramide generatrice, si avrà:*

$$d^{n-1\cdot}p_n = \frac{d^{\cdot}\tau_2 \, d^{n-2\cdot}s_{n-2}}{n-1}\,. \tag{11}$$

**Dim** — Se $y$ è il vertice della piramide generatrice converrà porre in (10) $\varkappa = o$, $\beta = n-2$. Intanto si ha:

$$V^{(1,n-2)}_{\cdot r} = \int_o^{\cdot r} \operatorname{sen}(\cdot r - \rho^{\cdot}) \operatorname{sen}^{n-2\cdot}\rho \, d^{\cdot}\rho = \operatorname{sen}{\cdot r} \int_o^{\cdot r} \operatorname{sen}^{n-2\cdot}\rho \cos{\cdot\rho} \, d^{\cdot}\rho - \cos{\cdot r} \int_o^{\cdot r} \operatorname{sen}^{n-1\cdot}\rho \, d^{\cdot}\rho;$$

cioè

$$\frac{V^{(1,n-2)}_{\cdot r}}{\operatorname{sen}^n {\cdot r}} = \frac{1}{n-1} - \cos{\cdot r} \, \frac{V^{(o,n-1)}_{\cdot r}}{\operatorname{sen}^n {\cdot r}}\,. \tag{12}$$

Per la formula (20) del § 4 si ha poi, se $h$ è l'altezza della piramide generatrice

$$\frac{d^{n-2\cdot}g_{n-1}}{V^{(o,n-2)}_{\cdot r}} = \operatorname{sen}{\cdot h} \, d^{n-2\cdot}s_{n-2}\,. \tag{13}$$

Per la (12) e (13) la (10) diviene intanto

$$d^{n-1\cdot}p_n = \frac{\operatorname{sen}{\cdot h}\, d^{\cdot}a\, d^{n-2\cdot}s_{n-2}}{n-1} + \frac{V^{(o,n-1)}_{\cdot r}}{\operatorname{sen}^n {\cdot r}} (d^{\cdot}b - \cos{\cdot r}\, d^{\cdot}a) \operatorname{sen}{\cdot h}\, d^{n-2\cdot}s_{n-2}\,. \tag{14}$$

Ciò posto, sia $t$ il polo-assoluto dell'iperpiano $u$ contenente la piramide generatrice; il triangolo $(t, y+d_1y, z+d_1z)$ ha i lati $(t, y+d_1y)$, $(t, z+d_1z)$ perpendicolari ad $u$ ed uguali a $\frac{\pi}{2} - d^{\cdot}a$, $\frac{\pi}{2} - d^{\cdot}b$, mentre ha il lato $(y + d_1y, z+d_1z)$ che può considerarsi eguale ad $(yz) = r$. Inoltre, poichè le rette $(yz)$ $(y+d_1y\,,z+d_1z)$ sono per ipotesi in uno stesso piano ed equinclinate alla retta $(y\,,y+d_1y)$, le rette stesse nelle vicinanze della retta $(y\,,y+d_1y)$ sono da considerarsi come aventi un parallelismo Euclideo, epperò la $(y+d_1y\,,z+d_1z)$ nelle vicinanze della $(y\,,y+d_1y)$ avrà un parallelismo Euclideo coll'iperpiano $u$, vale a dire sarà perpendicolare alla $(t,y+d_1y)$. Dunque nel predetto triangolo l'angolo in $(y+d_1y)$ è retto (a meno di infinitesimi di 2.° ordine); se ne conclude la relazione: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-d{\cdot}b\right)=$ $=\cos\left(\frac{\pi}{2}-d{\cdot}a\right)\cos{\cdot}r$, cioè

$$d{\cdot}b=d{\cdot}a\cos{\cdot}r\ .\text{(*)} \tag{15}$$

(*) Ecco una dimostrazione analitica della (15).

Poichè $y\,,y+d_1y\,,\ z\,,\ z+d_1z$ debbono stare in un piano, si dovrà avere per convenienti valori di $\lambda,\mu,\nu$

$$d_1z=\lambda d_1y+\mu y+\nu z\,. \tag{1}$$

Da questa si ha, poichè $u_y=o$, $u_z=o$,

$$u_{d_1z}=\lambda\, u_{d_1y}\,, \tag{2}$$

e noi dobbiamo determinare $\lambda$ colla condizione che, detto $t$ il punto comune alle rette $(y\,,y+d_1y)$ $(z\,,z+d_1z)$, si abbia ang $(\widehat{tyz})=\text{ang}(\widehat{t\;y+d_1y\;z+d_1z})$, cioè $d_1\,(\widehat{tyz})=o$ quando $t$ è fisso.

Ora, ponendo

$$A=\Omega_{tz}\Omega_{yy}-\Omega_{ty}\Omega_{zy}\ ,\quad B=\Omega_{tt}\Omega_{yy}-\Omega_{ty}^2\ ,\quad C=\Omega_{yy}\Omega_{zz}-\Omega_{yz}^2\,, \tag{3}$$

si ha (§ 2.°)

$$\cos\,(\widehat{tyz})=\frac{A}{\sqrt{BC}}\,;$$

e la condizione $d_1(\widehat{tyz})=o$ equivale alla $d_1\cdot\cos\,(\widehat{tyz})=o$, cioè alla

$$BCd_1A-AB\frac{1}{2}\,d_1C-AC\frac{1}{2}\,d_1B=o\,, \tag{4}$$

ove per la (3)

$$\left.\begin{aligned}
d_1A&=\Omega_{t\,d_1z}\Omega_{yy}+2\,\Omega_{tz}\Omega_{y\,d_1y}-\Omega_{t\,d_1y}\Omega_{zy}-\Omega_{ty}\Omega_{z\,d_1y}-\Omega_{ty}\Omega_{y\,d_1z}\,,\\
\frac{1}{2}\,d_1B&=\Omega_{tt}\,\Omega_{y\,d_1y}-\Omega_{ty}\,\Omega_{t\,d_1y}\ ,\\
\frac{1}{2}\,d_1C&=\Omega_{yy}\,\Omega_{z\,d_1z}+\Omega_{zz}\,\Omega_{y\,d_1y}-\Omega_{yz}\,\Omega_{y\,d_1z}-\Omega_{yz}\,\Omega_{z\,d_1y}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(*continua*)

La (14) per la (15) si semplifica e diviene

$$d^{n-1}\cdot p_n = \frac{\operatorname{sen}\cdot h \; d\cdot a \; d^{n-2}\cdot s_{n-2}}{n-1} . \tag{16}$$

Ora la sezione normale è un tubo trapezoidale di prima specie, la cui ampiezza $d\cdot\tau_2$ si ottiene da (16) facendovi $n=2$; si ha così

$$d\cdot\tau_2 = \operatorname{sen}\cdot h \; d\cdot a \tag{17}$$

Da (16) e (17) si ricava la (11), che così risulta dimostrata.

---

(*continuazione*)

Poichè $z+d_1 z$, $y+d_1 y$ sono sulle rette $zt$, $yt$ risp., si dovrà avere in conformità colla (1)

$$d_1 z = \nu z + \tau t \quad , \quad d_1 y = -\frac{\mu}{\lambda} y + \frac{\tau t}{\lambda} , \tag{6}$$

ove $\tau$ è infinitesimo come $\mu$ e $\nu$. Sostituendo nelle (5) a $d_1 y$ e $d_1 z$ i loro valori (6) e ponendo

$$D = \Omega_{tt}\,\Omega_{zy} - \Omega_{ty}\,\Omega_{tz} \quad , \quad E = \Omega_{zz}\,\Omega_{yt} - \Omega_{yz}\,\Omega_{tz} , \tag{7}$$

si trova

$$d_1 A = \left(\nu - 2\frac{\mu}{\lambda}\right) A + \tau B - \frac{\tau D}{\lambda} , \quad \frac{1}{2} d_1 B = -\frac{\mu}{\lambda} B , \quad \frac{1}{2} d_1 C = \left(\nu - \frac{\mu}{\lambda}\right) C + \frac{\tau}{\lambda} E + \tau A ,$$

colle quali la (4) diviene

$$\left(\nu - 2\frac{\mu}{\lambda}\right) ABC + \tau B^2 C - \frac{\tau BCD}{\lambda} - \left(\nu - \frac{\mu}{\lambda}\right) ABC - \frac{\tau ABE}{\lambda} - \tau A^2 B + \frac{\mu}{\lambda} ABC = o$$

$$= \quad \lambda = \frac{CD + AE}{BC - A^2} . \tag{8}$$

Ora, se si fa

$$F = \begin{vmatrix} \Omega_{yy} & \Omega_{yz} & \Omega_{yt} \\ \Omega_{zy} & \Omega_{zz} & \Omega_{zt} \\ \Omega_{ty} & \Omega_{tz} & \Omega_{tt} \end{vmatrix} ,$$

a mezzo della (3) e (7) si trova facilmente $CD + AE = \Omega_{yz} F$, $BC - A^2 = \Omega_{yy} F$, cosicchè la (8) diventa

$$\lambda = \frac{\Omega_{yz}}{\Omega_{yy}} . \tag{9}$$

Per la (9) la (2) ci dà poi

$$\frac{u_{d_1 z}}{\sqrt{\Omega_{zz}\;\omega_{uu}}} = \frac{\Omega_{yz}}{\sqrt{\Omega_{yy}\;\Omega_{zz}}} \times \frac{u_{d_1 y}}{\sqrt{\Omega_{yy}\;\omega_{uu}}} ,$$

che equivale alla (15) del testo.

---

# RICERCHE DI ESTENSIONIMETRIA INTEGRALE

NEGLI

# SPAZI METRICO-PROIETTIVI

## Nota II.

(Seduta del 5 febbraio 1907).

§ 1.

### Ampiezza di tutto lo spazio proiettivo e dei solidi e superfici ipersferiche.

Nella mia Nota precedente, che indicherò con [*D*], ho stabilito (§ 5) che l'ampienza dei tubi piramidali di specie $n-1$ è data dalla formula

$$d^{n-1}\cdot p_n = V_{\cdot r}^{(o,\, n-1)}\, d^{n-1}\sigma, \tag{1}$$

essendo $d^{n-1}\sigma$ l'ampiezza dell'angoloide nel vertice, $r$ il raggio vettore dal vertice alla base, e

$$V_{\cdot r}^{(o,\, n-1)} = \int_o^{\cdot r} \operatorname{sen}^{n-1}\cdot\rho\, d\cdot\rho, \tag{2}$$

cioè $V_{\cdot r}^{(o,\, n-1)}$ è il vettoriale dei gradi $o, n-1$ di $\cdot r$.

La (1) si può applicare immediatamente all'estensionimetria integrale in alcuni casi che passiamo ad esaminare.

**Ampiezza di tutto lo spazio projettivo** $S_n$. — Sia indicata con $A_n$. — Allora per un'osservazione già fatta ([*D*], § 2) $A_n$ sarà la stessa sia considerata come estensiva che come angolare; determiniamola come estensiva. Allo scopo consideriamo $A_n$ come la somma degli $\infty^{n-1}$ tubi piramidali aventi il vertice in un punto fisso $Q$ (fuori dell'assoluto e del resto arbitrario) e le basi sull'iperpiano $q$ polare assoluto di $Q$. Essi avranno tutti il raggio vettore $r = \frac{\pi}{2}$, e l'ampiezza dell'angoloide nel vertice eguale a quella della base; dunque, poichè nell'integrazione il raggio vettore passa due volte per uno stesso punto di $q$, si avrà da (1) la formula ricorrente:

$$A_n = 2\, V^{(o,\, n-1)}_{\frac{\pi}{2}} A_{n-1} . \tag{3}$$

Da questa si ricava anche l'altra

$$A_n = 4\, A_{n-2}\, V^{(o,\, n-1)}_{\frac{\pi}{2}} V^{(o,\, n-2)}_{\frac{\pi}{2}} . \tag{4}$$

Ora da (2) si ricavano facilmente le formole

$$V^{(o,\, o)}_{r} = r \ , \quad V^{(o,\, 1)}_{r} = 1 - \cos r \ , \quad (n-1)\, V^{(o,\, n-1)}_{r} = (n-2)\, V^{(o,\, n-3)}_{r} - \operatorname{sen}^{n-2} r \cos r , \tag{5}$$

colle quali si può calcolare per via ricorrente $V^{(o,\, n-1)}_{r}$ per qualunque valore di $n$.

Facendo in (5) $r = \frac{\pi}{2}$ avremo

$$V^{(o,\, o)}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \ , \quad V^{(o,\, 1)}_{\frac{\pi}{2}} = 1 \ , \quad (n-1)\, V^{(o,\, n-1)}_{\frac{\pi}{2}} = (n-2)\, V^{(o,\, n-3)}_{\frac{\pi}{2}} \tag{6}$$

dalle quali si ricava

$$(n-1)\, V^{(o,\, n-1)}_{\frac{\pi}{2}} V^{(o,\, n-2)}_{\frac{\pi}{2}} = \text{cost} = \frac{\pi}{2} . \tag{7}$$

La (4) per la (7) diventa intanto

$$A_n = \frac{2\pi A_{n-2}}{n-1} . \tag{8}$$

Se ora osserviamo che la retta projettiva è una linea *projettivamente* chiusa composta di due quadranti, si conclude che

$$A_1 = \pi : \tag{9}$$

da questa poi per la (3) si deduce

$$A_2 = 2\pi : \tag{10}$$

da (8), (9), (10) si ricava subito

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(per } n \text{ dispari)} & A_n = \dfrac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . \dfrac{n-1}{2}} \\[2ex] \text{(per } n \text{ pari)} & A_n = \dfrac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots .(n-1)} \end{array}\right\} . \tag{11}$$

In particolare si ha

$$A_1 = \pi\ ,\ A_2 = 2\pi\ ,\ A_3 = \pi^2\ ,\ A_4 = \frac{4\pi^2}{3}\ ,\ A_5 = \frac{\pi^3}{2}\ ,\ ecc. \text{*)} \qquad (12)$$

**Volume dell'ipersfera.** — Da (1) risulta subito, se $r$ è il raggio,

$$\textit{ampiezza solida dell'ipersfera di un } S_n = 2 A_{n-1} \Gamma_{\cdot r}^{(o,n-1)}\ ; \qquad (13)$$

dividendo per $K^{\frac{n}{2}}$ e passando al limite per $K = o$ si ha

$$\textit{volume dell'ipersfera di un } S_n \textit{ Euclideo} = 2 A_{n-1} \frac{r^n}{n}. \qquad (14)$$

In particolare da (13) e (15) si ottiene per $n = 2, 3$

$$\textit{ampiezza areale del circolo} = 2\pi\,(1 - \cos \cdot r), \qquad (15)$$
$$\textit{ampiezza solida della sfera} = 2\pi\,(\cdot r - \operatorname{sen} \cdot r \cos \cdot r); \qquad (16)$$

e da (14) e (12) si hanno le ordinarie formole per l'area del circolo e il volume della sfera.

**Superficie dell'ipersfera.** — Per la forma geodetica dell'elemento di estensione ([$D$] § 1) e per la (13) dovrà essere

$$\textit{ampiezza superficiale dell'ipersfera di un } S_n = 2 A_{n-1} \frac{d\Gamma_{\cdot r}^{(o,n-1)}}{d\cdot r} = 2 A_{n-1} \operatorname{sen}^{n-1} \cdot r\ ; \qquad (17)$$

donde per $n = 2, 3$ si hanno l'ampiezza lineare della circonferenza e superficiale della sfera.

Dividendo per $K^{\frac{n-1}{2}}$ e passando al limite per $K = o$ si ottiene:

$$\textit{superfice dell'ipersfera di un } S_n \textit{ Euclideo} = 2 A_{n-1} r^{n-1}. \qquad (18)$$

da (17) e (18) si ha per $n = 2$: *l'ampiezza lineare della circonferenza.*

L'ipersfera reciproca-assoluta di una data di raggio $\cdot r$ è di raggio $\frac{\pi}{2} - \cdot r$; cambiando dunque in (13) e (17) $\cdot r$ in $\frac{\pi}{2} - \cdot r$ si otterranno *le ampiezze angolari solide e superficiali dell'ipersfera.* In particolare si avrà:

$$\textit{ampiezza angolare della circonferenza} = 2\pi \cos \cdot r. \qquad (19)$$

---

*) Il coefficiente $a_n$ considerato dallo Schoute (*Mehrdimensionale Geometrie*, Vol. II, pag. 288-290) è legato all'ampiezza $A_{n-1}$ dalla relazione $a_n = \frac{2 A_{n-1}}{n}$.

La somma dei secondi membri di (15) e (19) è $2\pi$; ma è da notare che, nel caso iperbolico e per un circolo interno all'assoluto, $r$ è immaginario puro ([$D$], § 2) e quindi $\cos r$ è reale e maggiore di 1; *dunque in tal caso l'ampiezza angolare della circonferenza è maggiore di $2\pi$ e l'ampiezza areale del circolo risulta, per la* (15), *negativa.*

§ 2.

## Aree piane non Euclidee espresse per l'ampiezza angolare del contorno.

Una linea piana non intrecciata, chiusa, bilatera (in generale poligonale a lati curvi) divide il piano in due regioni *l'esterna* e *l'interna* definite risp. dal potere e non potere contenere l'intera retta projettiva *).

Se poi tale linea è *convessa* avviene che una retta mobile che la inviluppi sta tutta nella regione esterna e descrive questa *due volte*, perchè per ogni punto della regione esterna passano due inviluppanti; i fusi infinitesimi descritti dall'inviluppante nei successivi spostamenti sono doppi dei tubi trapezoidali di prima specie descritti da metà dell'inviluppante, e l'ampiezza areale di tali tubi ([$D$] § 5) è $\operatorname{sen} h\, da$, ove nel caso nostro $h = \frac{\pi}{2}$, $da =$ angolo di cui ha girato l'inviluppante; sicchè, se $a$ è l'ampiezza angolare totale del contorno, sarà $2a$ l'ampiezza del doppio della regione esterna, cioè $a$ sarà l'ampiezza areale della regione esterna; perciò, essendo $2\pi$ l'ampiezza dell'intero piano projettivo (§ 1), si avrà

$$\textit{ampiezza regione interna} = 2\pi - a. \tag{1}$$

La (1) vale in particolare pei triangoli, e coll'induzione si dimostra che vale per qualunque poligono rettilineo non intrecciato bilatero, *e perciò per qualunque contorno bilatero non intrecciato,* purchè, naturalmente, gli spostamenti infinitesimi dell'inviluppante si prendano positivi o negativi secondochè sono rivolti verso l'interno o verso l'esterno del contorno. Siccome

*) Una retta projettiva nel piano projettivo è una linea projettivamente chiusa senza intrecci ma *unilatera*, come si vede osservando che un raggio vettore condotto da un punto fissato fuori di essa nel piano dopo di aver descritta con continuità tutta la retta giunge al punto di partenza dalla banda opposta. Similmente un $S_{n-1}$ di un $S_n$ è un'ipersuperficie unilatera. — Due rette projettive di un piano si attraversano in un unico punto; perciò ad es. la superficie sferica ordinaria non è uno spazio projettivo, ma diventa tale quando essa si supponga generata dalle coppie di punti diametralmente opposti; in tal caso l'ampiezza di una circonferenza massima non è più $2\pi$ ma $\pi$. — Il prof. Amaldi mi avverte che l'unilateralità degli spazi $S_{n-1}$ di un $S_n$ è stata stabilita la prima volta da Klein.

un' area piana si può sempre deformare in un cerchio, risulta da un' osservazione fatta nella chiusa del § 1 che *l' ampiezza angolare totale a di un contorno bilatero non intrecciato è sempre positiva, e che* (poichè nell' ipotesi Euclidea il 1° membro di (1) deve annullarsi) *le relazioni:*

$$a < 2\pi \quad , \quad a = 2\pi \quad , \quad a > 2\pi \tag{2}$$

sono risp. caratteristiche delle ipotesi *ellittica, parabolica, iperbolica.*

Da (1) si ricava ([$D$] § 2):

*area interna a un contorno bilatero non intrecciato di ampiezza angolare* $a = K(2\pi - a)$ (3)

ove è da ricordare che, se il contorno è poligonale-rettilineo convesso, $a$ è la somma degli angoli esterni.

§ 3.

## Volume e superfice-laterale degli ipersolidi di rotazione attorno ad una retta.

Sia $x$ l' ascissa dei punti dell' asse; $x = o$, $x = a$ i punti estremi dell' asse; $r$ il raggio della sezione fatta nell' ipercorpo coll' iperpiano normale all' asse passante pel punto $x$; e sia $s$ la sezione di tale iperpiano col contorno dell' ipersolido; sarà $s$ la superficie di un' ipersfera di un $S_{n-1}$, epperò si avrà:

$$\cdot s = 2\,A_{n-2}\,\mathrm{sen}^{n-2}\cdot r. \tag{1}$$

**Volume** $p$. — Consideriamo il tubo piramidale ad $n-1$ dimensioni col vertice in $x$ e la base sopra una porzione $d^{n-2}s$ di $s$; per lo spostamento di $x$ in $x + dx$ tale tubo piramidale genera un tubo trapezoidale ad $n$ dimensioni la cui ampiezza $d^{n-1}p$ sarà data ([$D$], § 5) da

$$d^{n-1}\cdot p = \frac{d^{n-2}\cdot s\ \mathrm{sen}\cdot r\ d\cdot x}{n-1}. \tag{2}$$

La (2), integrata $n-2$ volte per $x$ costante, ci darà l' ampiezza $d\cdot p$ dello strato compreso fra l' iperpiano $x$ e l' iperpiano $x + dx$ nella forma

$$d\cdot p = \frac{\cdot s\ \mathrm{sen}\cdot r\ d\cdot x}{n-1} = \frac{2\,A_{n-2}}{n-1}\,\mathrm{sen}^{n-1}\cdot r\ d\cdot x, \tag{3}$$

e questa con una quadratura fra $o$ ed $a$ ci dà il volume $p$ dell' ipersolido.

**Superficie laterale** $\sigma$. — Sia $d\sigma$ la striscia infinitesima di $\sigma$ compresa fra le due sezioni fatte dagli iperpiani perpendicolari all' asse e passanti per i punti $x, x + dx$ dell'asse; sia poi $dm$ l'elemento d'arco di meridiano compreso fra le stesse sezioni. Allora, essendo i meridiani le trajettorie ortogonali delle sezioni con iperpiani perpendicolari all'asse, per la forma geodetica dell'elemento di estensione ([$D$], § 1) si avrà:

$$d{}^\cdot\sigma = {}^\cdot s\, d{}^\cdot m. \tag{4}$$

E siccome in un piano meridiano le $r = \text{cost.}$ sono linee di equidistanza dall'asse e le $x = \text{cost.}$ rette perpendicolari all'asse, si avrà:

$$d{}^\cdot m = \sqrt{d{}^\cdot r^2 + \cos^2{}^\cdot r\, d{}^\cdot x^2}\,; \tag{5}$$

a mezzo di (4) e (5) $dm$ è determinato con una quadratura fra $o$ ed $a$ non appena sia data l'equazione del meridiano: ${}^\cdot r = \text{funz.}\,{}^\cdot x$.

**Caso in cui il meridiano è un cerchio.** — Se tale cerchio è una linea di equidistanza dell'asse, si ha $r = \text{cost}$ come equaz. del meridiano. Allora da (3) si ricava subito

$$ {}^\cdot p = \frac{2A_{n-2}}{n-1}\,{}^\cdot a \operatorname{sen}^{n-1}{}^\cdot r\,; \tag{6}$$

e da (4) e (5) si ha

$$d{}^\cdot\sigma = {}^\cdot s \cos{}^\cdot r\, d{}^\cdot x = 2A_{n-2} \operatorname{sen}^{n-2}{}^\cdot r \cos{}^\cdot r\, d{}^\cdot x\,,$$

cioè

$${}^\cdot\sigma = 2A_{n-2}\,{}^\cdot a \operatorname{sen}^{n-2}{}^\cdot r \cos{}^\cdot r = \frac{d{}^\cdot p}{d{}^\cdot r}. \tag{7}$$

Se invece $r$ è variabile, prendendola per variabile indipendente, si dovrà esprimere $x$ per $r$, il che si fa a mezzo dell'equazione

$$\cos{}^\cdot(x - x_0) = \frac{\cos{}^\cdot\rho - \operatorname{sen}{}^\cdot r_0 \operatorname{sen}{}^\cdot r}{\cos{}^\cdot r_0 \cos{}^\cdot r}\,, \tag{8}$$

che rappresenta l'equazione di un cerchio di centro $(x_0, r_0)$ e di raggio $\rho$.

Allora indicando con $r_1$, $r_2$ i valori estremi di $r$ da (3), (4), (5), (8) si ottiene

$${}^\cdot p = \frac{2A_{n-2}}{n-1}\int_{{}^\cdot r_1}^{{}^\cdot r_2} \frac{(\operatorname{sen}{}^\cdot r_0 - \cos{}^\cdot\rho \operatorname{sen}{}^\cdot r) \operatorname{sen}^{n-2}{}^\cdot r\, d{}^\cdot r}{\cos{}^\cdot r\sqrt{\operatorname{sen}^2{}^\cdot\rho - \operatorname{sen}^2{}^\cdot r_0 + 2\cos{}^\cdot\rho \operatorname{sen}{}^\cdot r_0 \operatorname{sen}{}^\cdot r - \operatorname{sen}^2{}^\cdot r}} \tag{9}$$

$${}^\cdot\sigma = 2A_{n-2} \operatorname{sen}{}^\cdot\rho \int_{{}^\cdot r_1}^{{}^\cdot r_2} \frac{\operatorname{sen}^{n-2}{}^\cdot r \cos{}^\cdot r\, d{}^\cdot r}{\sqrt{\operatorname{sen}^2{}^\cdot\rho - \operatorname{sen}^2{}^\cdot r_0 + 2\cos{}^\cdot\rho \operatorname{sen}{}^\cdot r_0 \operatorname{sen}{}^\cdot r - \operatorname{sen}^2{}^\cdot r}}. \tag{10}$$

Ponendo $z = \operatorname{sen}{}^\cdot r$ tanto in (9) quanto in (10) la quantità da integrare prende la forma: funzione razionale $(z, \sqrt{az^2 + bz + c})\, dz$, epperò: *se il meridiano è circolare,* p *e* $\sigma$ *si possono in ogni caso ottenere in termini finiti con funzioni elementari di* $r_1$ *ed* $r_2$. Se $r_0 = o$, il segmento diventa *ipersferico;* se invece si ia $\rho = \frac{\pi}{2}$, il segmento diventa *tronco-conico* (o conico) essendo $\frac{\pi}{2} - r_o$ l'inclinazione delle generatrici all'asse. Se $b$ è la distanza minima o massima del meridiano circolare dall'asse, si potrà porre: $r_o = \pm \rho \pm b$; allora poi le (9) e (10) sono valide anche al limite per $\rho = \infty$, cioè pel caso in cui il meridiano sia un oriciclo.

Dividendo $p$ per $K^{\frac{n}{2}}$ e $\sigma$ per $K^{\frac{n-1}{2}}$ e passando al limite per $K = o$ si ottengono subito i valori di $p$ e di $\sigma$ nell'ipotesi Euclidea.

## § 4.

## $(n+1)$ — edro-metria.

Un punto (iperpiano) appartenente all'assoluto si dirà brevemente *asintotico*. Un punto (iperpiano) *reale* non asintotico si dirà poi *iperbolico* o *ellittico* secondochè appartiene o non a qualche iperpiano (punto) asintotico *reale*.

Noi riterremo ora che, se $\Omega_{xx} = o$ è l'equazione locale dell'assoluto, sia $\Omega_{xx} > o$ per $x$ ellittico; allora poi $\Omega_{xx}$ sarà trasformabile con sostituzioni lineari *reali* nella forma canonica di WEYERSTRASS $W_{xx} = x_0^2 + K(x_1^2 + \dots + x_n^2)$, epperò il discriminante $\Delta$ di $\Omega_{xx}$ avrà il segno del discriminante $K^n$ di $W_{xx}$; dunque

$$\left.\begin{array}{lll} \text{se } K > o & , & \text{sarà } \Delta > o, \\ \text{se } K < o \text{ ed } n \text{ pari}, & \text{»} & \Delta > o, \\ \text{se } K < o \text{ ed } n \text{ dispari}, & \text{»} & \Delta < o. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Dalla stessa ipotesi segue che, se $\omega_{uu}$ è la forma aggiunta di $\Omega_{xx}$, sarà $\omega_{uu} > o$ quando l'iperpiano $u$ è ellittico; infatti da $\Omega_{xx}$ si passa ad $\omega_{uu}$ per mezzo di sostituzioni delle $x$ con combinazioni lineari *reali* delle $u$.

---

Suppongasi ora che l'$(n+1)$ — edro fondamentale delle coordinate contragredienti $x$ ed $u$ abbia i vertici non iperbolici; allora per $K > o$ le facce saranno ellittiche e per $K < o$ le facce saranno iperboliche; dunque

$$\begin{array}{l} \text{per } K > o \text{ sarà: } \omega_{oo} > o \,.\, \omega_{11} > o, \dots \omega_{nn} > o;\ \Omega_{oo} > o, \dots \Omega_{nn} > o; \\ \text{e per } K < o \quad \text{»} \quad \omega_{oo} < o, \omega_{11} < o, \dots \omega_{nn} < o;\ \Omega_{oo} \geq o, \dots \Omega_{nn} \geq o; \end{array}$$

cioè in ogni caso:

$$\Omega_{hh} \geq o \ , \ K\omega_{hh} > o \quad (h = o, 1 \dots n). \tag{2}$$

---

L'$(n+1$ — edro fondamentale divide chiaramente a mezzo degli iperpiani-facce lo spazio projettivo $S_n$ in $2^n$ *caselle* caratterizzate da ciò che le coordinate $x$ di un punto generico di una tali caselle hanno fra loro rapporti di segni invariabili. Una di tali caselle si dirà *metrica* se tutti i punti *interni* ed essa sono *ellittici;* cosicchè per $K > o$ ognuna delle $2^n$ caselle sarà metrica e nell'ipotesi $K < o$ (e (2)) una ed una sola di tali $2^n$ caselle sarà metrica. Noi aggiungeremo ora alla ipotesi (2) la condizione che la casella *positiva* (cioè quella in cui i rapporti fra le $x$ sono positivi) sia metrica.

---

**Coordinate incentriche di punti.** — Nella fatta ipotesi introduciamo un nuovo sistema di coordinante $\xi$ dei punti di $S_n$ ponendo:

$$x_o = \xi_o \sqrt{K\omega_{oo}}\ ,\ x_1 = \xi_1 \sqrt{K\omega_{11}}\ ,\ldots.\ x_n = \xi_n \sqrt{K\omega_{nn}}\ , \tag{3}$$

ove i radicali (che per le (2) sono reali e non nulli) siano positivi.

Tali coordinate $\xi$ saranno ancora riferite allo stesso $(n+1)$-edro fondamentale e daranno luogo ancora alla stessa casella positiva. Il loro punto unità $\xi_o = \xi_1 = \ldots = \xi_n$ sarà poi l'*incentro* della casella metrica; ed invero, se $d_{x,u}$ è la distanza del punto $x$ dell'iperpiano $u$, si ha (com'è noto):

$$\text{sen}\cdot d_{x,u} = \frac{u_x}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\omega_{uu}}}\ ;$$

in particolare prendendo per $x$ il punto di coordinate

$$x_o = \sqrt{K\omega_{oo}}\ ,\ x_1 = \sqrt{K\omega_{11}}\ ,\ldots.\ x_n = \sqrt{K\omega_{nn}}\ , \tag{4}$$

e per iperpiano $u$ un iperpiano fondamentale (per esempio $x_h = o$) si avrà:

$$\text{sen}\cdot d_{x,u} = \frac{u_h\sqrt{K\omega_{hh}}}{\sqrt{\Omega_{xx}u_h}\,\sqrt{\omega_{hh}}} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{\Omega_{xx}}} = \text{quantità indipendente da } h;$$

sicchè il punto (4) è effettivamente equidistante delle facce dell'$(n+1)$-edro; essendo poi interno alla casella metrica, ne sarà appunto l'incentro.

Le $\xi$ sono perciò da dirsi *le coordinate incentriche di punti relative alla casella metrica.*

---

**Coordinate incentriche di iperpiani.** — Così saranno da dirsi le coordinate $\eta$, contragredienti alle $\xi$; esse per le (3) saranno date dalle

$$u_o = \frac{\eta_o}{\sqrt{K\omega_{oo}}}\ ,\ u_1 = \frac{\eta_1}{\sqrt{K\omega_{11}}}\ ,\ldots.\ u_n = \frac{\eta_n}{\sqrt{K\omega_{nn}}}\ . \tag{5}$$

**Equazioni incentriche locale e tangenziale dell'assoluto.** — Pongasi

$$\pi_{hj} = \frac{K\omega_{hj}}{\sqrt{K\omega_{hh}}\,\sqrt{K\omega_{jj}}} \qquad (h\,,j = 0\,.\,1\,\ldots\,n); \tag{6}$$

allora si avrà dalle (5)

$$K\omega_{uu} = K\Sigma\omega_{hj}\,u_h\,u_j = K\Sigma\,\omega_{hj}\,\frac{\eta_h}{\sqrt{K\omega_{hh}}}\cdot\frac{\eta_j}{\sqrt{K\omega_{jj}}} =$$

$$= \Sigma\,\frac{K\omega_{hj}}{\sqrt{K\omega_{hh}}\,\sqrt{K\omega_{jj}}}\,\eta_h\,\eta_j = \Sigma\,\pi_{hj}\,\eta_h\eta_j = \pi_{\eta\eta}; \tag{7}$$

cioè

$$\pi_{\eta\eta} = 0. \tag{8}$$

sarà l'equazione tangenziale incentrica dell'assoluto.

---

**Caratteri metrici dell'equazione tangenziale incentrica dell'assoluto.** — Sia $\sigma_{hj}$ $(h - = j)$ il diedro *interno* alla casella metrica fondamentale contenuto dagli iperpiani fondamentali di indici $h$ e $j$; dico che, se $\pi_{\eta\eta} = o$ è l'equazione tangenziale incentrica dell'assoluto, sarà:

$$\pi_{hj} = \begin{cases} 1 & (h \quad = j) \\ -\cos\sigma_{hj} & (h - = j) \end{cases} \qquad (h\,,j = 0\,.\,1\,\ldots\,n)\,. \tag{9}$$

**Dim.** — Se $h = j$ la (6) ci dà effettivamente $\pi_{hj} = 1$ conformente alla prima della (9).

Sia poi $h - = j$; allora l'equazione $\pi^{(h\,,j)}_{\eta\eta} = o$ dell'assoluto nel fascio degli iperpiani fondamentali di indici $h$ ed $j$ si avrà dalla $\pi_{\eta\eta} = o$ ponendovi a zero tutte le $\eta$ ad eccezione di $\eta_h$ , $\eta_j$; si avrà così per es.: $\pi^{(0,1)}_{\eta\eta} =$ $= \eta_o^2 + 2\pi_{o1}\,\eta_o\eta_1 + \eta_1^2$; dalla quale si ha, se $\eta$ ed $\eta'$ sono due iperpiani qualunque del fascio, $\pi^{(o,1)}_{\eta\eta'} = \eta_o\,\eta'_o + \pi_{o1}\,(\,\eta_o\eta'_1 + \eta'_o\,\eta_1) + \eta_1\eta'_1$.

Se $\theta$ è uno qualunque degli angoli fra $\eta$ ed $\eta'$, si avrà poi

$$\cos^2\theta = \frac{\left\{\pi^{(0,1)}_{\eta\eta'}\right\}^2}{\pi^{(0,1)}_{\eta\eta}\;\pi^{(0,1)}_{\eta'\eta'}}.$$

Poniamo $\eta'$ una volta nell'iperpiano di indice $o$ ($\eta'_o = 1$ , $\eta'_1 = o$) e un'altra sull'iperpiano di indice $1$ ($\eta'_o = o$ , $\eta'_1 = 1$); allora, se $\theta_o$ , $\theta_1$ sono due angoli formati rispettivamente da $\eta$ con i due iperpiani fondamentali $o$ , $1$ del fascio si avrà:

$$\cos^2\theta_o = \frac{(\eta_o + \pi_{o1}\,\eta_1)^2}{\pi^{(0,1)}_{\eta\eta}} \quad , \quad \cos^2\theta_1 = \frac{(\eta_1 + \pi_{o1}\,\eta_o)^2}{\pi^{(0,1)}_{\eta\eta}}\,. \tag{10}$$

Riteniamo ora che $\eta$ sia *interno* alla casella metrica ed equidistante dai due iperpiani fondamentali $o$, $1$, cioè $\theta_o = \theta_1 = \frac{1}{2}\sigma_{o1}$. Intanto dalle (10) dovrà aversi

$$\eta_o + \pi_{o1}\eta_1 = \pm(\eta_1 + \pi_{o1}\eta_o) \;.=.\; \eta_o(1 \mp \pi_{o1}) = \pm\eta_1(\mp\pi_{o1}) \,,$$

cioè (poichè l'ipotesi $1 \mp \pi_{o1} = o$ è da escludersi (*)): $\eta_o = \pm\eta_1$.

L'equazione dell'iperpiano bisettore $\eta$ è dunque di una delle due forme $\xi_o \pm \xi_1 = o$; ma la $\xi_o + \xi_1 = o$ ci dà pei punti di tale iperpiano: $\frac{\xi_o}{\xi_1} = -1$, mentre pei punti interni $\frac{\xi_o}{\xi_1}$ deve sempre essere positivo; dunque l'equazione di $\eta$ deve essere $\xi_o - \xi_1 = o$, cioè deve essere $\eta_o = -\eta_1$. Allora poi le (10) ci danno concordemente

$$\cos^2\frac{1}{2}\sigma_{o1} = \frac{(1-\pi_{o1})^2}{1-2\pi_{o1}+1} = \frac{(1-\pi_{o1})^2}{2(1-\pi_{o1})} = \frac{1-\pi_{o1}}{2} \,.$$

Ma si ha pure

$$\cos^2\frac{1}{2}\sigma_{o1} = \frac{1+\cos\sigma_{o1}}{2} \,.$$

Dunque sarà:

$$\pi_{o1} = -\cos\sigma_{o1} \,;$$

che è conforme alla seconda delle (9).

**Equazione locale incentrica dell'assoluto.** — Pongasi

$$\nabla = \begin{vmatrix} \pi_{oo} \ldots \pi_{on} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \pi_{no} \ldots \pi_{nn} \end{vmatrix} \,, \quad \nabla_{hj} = \frac{\partial\nabla}{\partial\pi_{hj}} \quad (h, j = o, \ldots n) : \tag{11}$$

Allora $\frac{\nabla_{\xi\xi}}{\nabla}$ sarà la forma aggiunta di $\pi_{\eta\eta}$ e quindi la $\nabla_{\xi\xi} = 0$ è l'equazione locale incentrica dell'assoluto.

**Osservazione.** — Siccome per la (7) si ha $K\rho_{uu} = \pi_{\eta\eta}$, così (poichè le (5) sono reali) il segno di $\nabla$ sarà quello di $K^{n+1}\Delta$; adunque per le (1) avremo:

$$\begin{aligned} &\text{per } K > o : \nabla > o \\ &\text{per } K < o : \nabla < o \end{aligned} \tag{12}$$

cioè in ogni caso $\nabla$ ha il segno di $K$.

---

(*) Se fosse $\pi_{01} = \pm 1$, la $\pi^{(01)}_{\eta\eta}$ sarebbe un quadrato perfetto epperò il sostegno del fascio sarebbe tangente all'assoluto e i vertici contenuti in esso sarebbero esterni all'assoluto, contro l'ipotesi che essi siano non iperbolici.

Inoltre della $K\omega_{nu} = \pi_{\eta\eta}$ si ricava (prendendo la forma aggiunta d'ambi i membri): $\frac{1}{K}\Omega_{xx} = \frac{\nabla_{\xi\xi}}{\nabla}$, da cui

$$\Omega_{hj} = \frac{K\nabla_{hj}}{\nabla} . \tag{13}$$

Per le (2) e (12) avremo dunque:

$$\nabla_{oo} \geqq 0, \nabla_{11} \geqq 0, \dots \nabla_{nn} \geqq 0. \tag{14}$$

e veramente *saranno nulle tante delle* $\nabla_{hh}$ *quanti sono i vertici asintotici dell'* $(n+1)$ *-edro.*

**Coordinate baricentriche relative a un $(n+1)$ -edro non asintotico.** — Se l' $(n+1)$ -dro non è asintotico per la (2) abbiamo:

$$\Omega_{oo} > 0 , \Omega_{11} > 0, \dots \Omega_{nn} > 0. \tag{15}$$

Ponendo dunque

$$x_o = \frac{\psi_o}{\sqrt{\Omega_{oo}}} , x_1 = \frac{\psi_1}{\sqrt{\Omega_{11}}} , \dots x_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{\Omega_{nn}}} \tag{16}$$

ove i radicali sono positivi, si ottiene un sistema di coordinate $\psi$ riferito allo stesso $(n+1)$ -edro e che danno luogo alla stessa casella positiva. Il punto unità di tali coordinate si dice *baricentro* della casella metrica e le coordinate sono perciò da dirsi *baricentriche*. *L'equazione baricentrica locale dell'assoluto* ha chiaramente la forma $p_{\psi\psi} = 0$, ove

$$p_{hj} = \frac{\Omega_{hj}}{\sqrt{\Omega_{hh}}\sqrt{\Omega_{jj}}} \quad (h, j = 0, 1 \dots n). \tag{17}$$

Con un ragionamento analogo a quello usato per le coordinate incentriche si proverebbe che: *se* $s_{hj}$ $(h -\!\!= j)$ *è lo spigolo che unisce i vertici* $h, j$ si ha:

$$p_{hj} = \begin{cases} 1 & (h = j) \\ \cos s_{hj} & (h -\!\!= j) \end{cases} \quad (h, j = 0, 1 \dots n). \tag{18}$$

Per le (12) e (13) le (17)) ci danno poi:

$$p_{hj} = \frac{\nabla_{hj}}{\sqrt{\nabla_{hh}}\sqrt{\nabla_{jj}}} \quad (h, j = 0, 1 \dots n). \tag{19}$$

*le quali per le* (18), (11), (9) *formano un sistema di formule* $(n+1)$ *-edrometriche permettenti di calcolare gli spigoli a mezzo dei diedri.*

Se $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ sono le ***coordinate baricentriche di iperpiani*** (*), vale a dire le contragredienti alle $\psi_0, \ldots \psi_1, \psi_n$, si avrà per le (16)

$$u_0 = \varphi_0 \sqrt{\Omega_{00}}\ ,\ u_1 = \varphi_1 \sqrt{\Omega_{11}}\ , \ldots\ u_n = \varphi_n \sqrt{\Omega_{nn}}\ ; \tag{20}$$

colle quali si potrebbe calcolare l'equazione baricentrica tangenziale dell'assoluto. Basta però all'uopo calcolare la forma aggiunta della $p_{\psi\psi} = 0$. Si ponga allo scopo

$$D = \begin{vmatrix} p_{00} \ldots p_{0n} \\ \ldots\ldots \\ p_{n0} \ldots p_{nn} \end{vmatrix}\ ,\quad D_{hj} = \frac{\partial D}{\partial p_{hj}}\ ;\quad (h, j = 0, 1 - n); \tag{21}$$

allora tale forma aggiunta sarà $\dfrac{D_{\varphi\varphi}}{D}$ *e quindi* $D_{\varphi\varphi} = 0$ *sarà l'equazione baricentrica tangenziale dell'assoluto.*

Ora poichè le (16) sono reali e a loro mezzo si ha $\Omega_{xx} = p_{\xi\xi}$, il segno di $D$ sarà quello di $\Delta$, cioè si avrà per le (1):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{per } K > 0, & : D > 0 \\ \text{per } K < 0, n \text{ pari} & : D > 0 \\ \text{per } K < 0, n \text{ dispari} & : D < 0. \end{array}\right\} \tag{22}$$

Da queste segue che, se $\varphi$ è un iperpiano ellittico (essendo allora $\dfrac{D_{\varphi\varphi}}{D} > 0$) si avrà

$$\left.\begin{array}{ll} \text{per } K > 0 & : D_{\varphi\varphi} > 0 \\ \text{per } K < 0\ ,\ n \text{ pari} & : D_{\varphi\varphi} > 0 \\ \text{per } K < 0\ ,\ n \text{ dispari} & : D_{\varphi\varphi} < 0. \end{array}\right\} \tag{23}$$

E poichè per $K = 0$ gli iperpiani fondamentali sono iperbolici, così sarà:

$$\text{per } K > 0 : D_{hh} > 0 ; \text{ per } K < 0 \text{ ed } n \text{ pari} : D_{hh} < 0 : \text{per } K < 0 \text{ ed } n \text{ dispari} : D_{hh} > 0, \tag{24}$$

cioè in ogni caso

$$\frac{KD_{hh}}{D} > 0 \qquad (h = 0, 1 \ldots n). \tag{25}$$

Ora da (6) cambiandovi $\omega_{uu}$ in $\dfrac{D_{\varphi\varphi}}{D}$ risulta

$$\pi_{hj} = \frac{\frac{K}{D} D_{hj}}{\sqrt{\frac{K}{D} D_{hh}}\ \sqrt{\frac{K}{D} D_{jj}}}\ , (h, j = 0, 1 \ldots n) \tag{26}$$

---

(*) È facile vedere che l'iperpiano unità delle coordinate baricentriche passa pei punti medi *esterni* degli spigoli e perciò è equidistante dai vertici. Ciò mostra la correlatività fra coordinate incentriche e baricentriche.

la quale può scriversi anche

$$\pi_{hj} = \frac{D_{hj}}{\sqrt{D_{hh}}\,\sqrt{D_{jj}}}, (h, j = 0, 1 \ldots n) \tag{27}$$

purchè quando ($D_{hh} < o$, $D_{jj} < o$) il prodotto reale $\sqrt{D_{hh}}\,\sqrt{D_{jj}}$ si prenda negativo, cioè si intenda allora: $\sqrt{D_{hh}} = + i\sqrt{-D_{hh}}$, $\sqrt{D_{jj}} = + i\sqrt{-D_{jj}}$.

Le (26) e (22) costituiscono il sistema reciproco delle formule $(n+1)$-edriche (19); *per loro mezzo dati gli spigoli si calcolano i diedri di un $(n+1)$-edro non asintotico tenendo presenti le* (21), (18) *e* (9).

---

**Sub-$(n+1)$-edrometria.** — Vogliansi determinare i diedri di un $(m+1)$-edro subordinato per mezzo dei diedri del dato $(n+1)$-edro. Per semplicità di notazione suppongasi che l'$(m+1)$-edro subordinato sia quello di vertici $0, 1, \ldots m$; riferendoci alle coordinate locali incentriche $\xi$ dell'$(n+1)$-edro l'equazione $\tau_{\xi\xi}^{(m)} = o$ dell'assoluto nell'$S_m$ che contiene il fissato $(m+1)$-edro si ottiene da $\tau_{\xi\xi} = o$ ponendovi $\xi_{m+1} = o, \ldots \xi_n = o$. Se dunque poniamo

$$R = \begin{vmatrix} \tau_{oo} & \cdots & \tau_{om} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \tau_{mo} & \cdots & \tau_{mm} \end{vmatrix}, R_{hj} = \frac{\partial R}{\partial \tau_{hj}} \quad (h, j = 0, 1 \ldots m), \tag{28}$$

sarà $R$ il discriminante di $\tau^{(m)}_{\xi\xi} = o$, e indicando con $\pi_{hj}^{(m)}$ il coseno del diedro proprio del fissato $(m+1)$— edro ed opposto allo spigolo $s_{hj}$, si avrà [analogamente a (6) o a (27)] la formula:

$$\pi_{hj}^{(m)} = \frac{R_{hj}}{\sqrt{R_{hh}}\,\sqrt{R_{jj}}} \quad (h, j = 0, 1 \ldots m), \tag{29}$$

che dà quanto cercavasi.

È da notare poi che colla regola che esprime i minori d'ordine $m$ del reciproco di $\tau$ mediante $\tau$ e i minori di $\tau$. (PASCAL, *I determinanti,* Manuali Hoepli, pag. 45), le (29) si potrebbero notevolmente semplificare; il che si ommette per brevità.

§ 5.

## Volume dell'$(n+1)$-edro.

Il volume di un $(n+1)$-edro è naturalmente l'estensione di una sua casella metrica. Considerandolo come una funzione dei diedri $\sigma$ l'indicheremo con $T_{(\sigma)}$. Per rappresentare analiticamente $T_{(\sigma)}$ ricorriamo alle coordinate locali incentriche $\xi$ rispetto alle quali l'assoluto ha l'equazione $\tau_{\xi\xi} = o$, ove per le (11) e (9) del § 4.° i coefficienti sono determinate funzioni dei diedri. Allora, osservando che per la (11) del § 4.° il discriminante di $\tau_{\xi\xi}$ è $\tau^n$, potremo intanto rappresentare l'elemento d'ampiezza estensiva $d^n \cdot p_n$ nella forma ([$D$], § 2, (5)):

$$d^n \cdot p_n = \frac{(\xi, d_1\xi, \dots d_n\xi)\, \nabla^{\frac{n}{2}}}{\nabla_{\xi\xi}^{\frac{n+1}{2}}}. \tag{1}$$

Ma se noi facciamo $\xi_o = 1$ e prendiamo per variabili indipendenti le $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$, il determinante $(\xi, d_1\xi, \dots d_n\xi)$ si cangia nel prodotto $d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_n$; d'altra parte facendo variare le $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ nel campo reale e positivo si ottengono tutti e soli i punti della casella metrica; si avrà dunque da (1):

$$\cdot T_{(\sigma)} = \nabla^{\frac{n}{2}} \int_o^{+\infty} \dots \int_o^{+\infty} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_n}{\nabla_{\xi\xi}^{\frac{n+1}{2}}} \quad (\text{con } \xi_o = 1). \tag{2}$$

**Volume dell'(n + 1) -edro non asintotico in funzione degli spigoli.** — La (2) è valida anche se l'$(n+1)$-edro è una o più volte asintotico (cioè con uno o più vertici asintotici). Ma quando non è asintotico, e quindi tutti i suoi spigoli sono finiti, il volume si può considerare anche come una funzione degli spigoli; così considerato sia indicato con $\mathrm{T}_{(s)} (= T_{(\sigma)})$; allora analogamente a (2) (ricorrendo all'equazione baricentrica dell'assoluto $p_{\psi\psi} = o$, i cui coefficienti sono per le (18) del § 4 determinate funzioni degli spigoli) si ha:

$$\cdot \mathrm{T}_{(s)} = D^{\frac{1}{2}} \int_o^{+\infty} \dots \int_o^{+\infty} \frac{d\psi_1\, d\psi_2 \dots d\psi_n}{p_{\xi\xi}^{\frac{n+1}{2}}} \ (\text{con } \psi_o = 1).\ (*) \tag{3}$$

**Area del triangolo.** — Colle (2) e (3) si trova per $n = 2$:

$$\cdot T_{(\sigma)} = \sigma_{01} + \sigma_{02} + \sigma_{12} - \pi \quad , \quad \cdot \mathrm{T}_{(s)} = \frac{1}{i} \log \frac{1 + p_{01} + p_{02} + p_{12} + \sqrt{D}}{1 + p_{01} + p_{02} + p_{12} - \sqrt{D}}, \tag{4}$$

che sono conformi a ben noti risultati (BALTZER, *Trig. sfer.*).

**Formula di riduzione pel calcolo di $\mathrm{T}_{(\sigma)}$ quando $n > 2$.** — Tale formula risulta dal seguente teorema (valido per $K - = 0$):

*Se* $U_{hj}$ (h, j = 0, 1 .... n; h — = j) *è il volume dell'* $(n-1)$ *-edro sostegno del diedro* $\sigma_{hj}$ *in un dato* (n + 1) *-edro di volume* $\mathrm{T}_{(\sigma)}$ *e se* $U_{h,j}$ *si intende espresso in funzione dei diedri dell'* (n + 1) *-edro stesso* (§ 4.°), *si avrà per* n > 2:

$$(n-1) \frac{\partial \cdot T_{(\sigma)}}{\partial \sigma_{kj}} = \cdot U_{kj} \quad \text{cioè} \quad (n-1)\ d \cdot T_{(\sigma)} = \Sigma \cdot U_{kj}\, d\sigma_{kj}. \tag{5}$$

---

(*) A schiarimento di quanto è detto nei Cenni riassuntivi, soggiungo che il prof. D'OVIDIO chiama *ampiezza del gruppo dei vertici del nostro* (n + 1) *-edro* la quantità: arco seno $\sqrt{D}$ essendo $D$ definito come in (3).

*Inoltre facendo variare il solo diedro $\sigma_{kj}$, si avrà $T_{(\sigma)}$ dato da*

$$\cdot T_{(\sigma)} = \frac{1}{n-1} \int_{\sigma^0_{kj}}^{\sigma_{kj}} \cdot U_{kj}\, d\sigma_{kj}\,, \tag{6}$$

*ove $\sigma^0_{kj}$ è un valore di $\sigma_{kj}$ che annulla $\tau$.*

**Dim.** — Siano $a^0, a^1, \dots a^n$ i vertici e $\alpha^0, \alpha^1, \dots \alpha^n$ gli iperpiani-facce risp. opposti nel dato $(n+1)$-edro. Spostiamo di infinitamente poco $\alpha^0$ esternamente all'$(n+1)$-edro metrico in modo che dei diedri di esso vari il solo $\sigma_{01}$ opposto allo spigolo $s_{01}$. L'aumento $d\cdot p_n$ subito da $T_{(\sigma)}$ per tale spostamento di $\alpha^0$ sarà chiaramente:

$$d\cdot p_n = \frac{\partial \cdot T_{(\sigma)}}{\partial \sigma_{01}}\, d\sigma_{01}\,. \tag{7}$$

Noi poi possiamo calcolare per altra via lo strato infinitesimo $d\cdot p_n$. Allo scopo si indichi con $d^{n-2}U_{01}$ una porzione $n-2$ volte infinitesima di $U_{01}$ e si consideri il tubo rettilineo piramidale di vertice $a^1$ e di base $d^{n-2}U_{01}$; dando all'asse $r$ di tale tubo uno spostamento infinitesimo in modo che accompagni $\alpha^0$ nel suo moto e non esca dal piano (a due dim.) che $r$ forma colla retta fissa $a^0a^1$, il tubo piramidale predetto descriverà un tubo rettilineo una volta imprimitivo la cui ampiezza estensiva potremo indicare con $d^{n-1}\cdot p_n$ perchè con $n-2$ integrazioni successive per $\sigma_{01} =$ cost. da esso si ottiene poi il $d\cdot p_n$ dato da (7). Ora durante il moto di $\alpha^0$ i diedri dell'angoloide di vertice $a^1$ nel dato $(n+1)$-edro rimangono inalterati e perciò tale angoloide subisce uno spostamento rigido. In tale spostamento la retta $a^0a^1$ scorre su se stessa e ognuna della $a^1a^2$, $a^1a^3$, .... $a^1a^n$ descrive un piano, perchè per l'ipotesi le rette $a^0a^1, \dots a^0a^n$ sono fisse; allora il sistema lineare $\Sigma_{n-2}$ degli $\infty^{n-2}$ piani (a 2 dimensioni) passanti per $a^0a^n$, considerati come rigidamente collegati all'angoloide mobile $a^1$, è nelle stesse condizioni di un iperpiano rigido ad $n-2$ dimensioni di cui sono tenuti fissi $n-1$ punti, *cioè è immobile*; sicchè ogni piano di $\Sigma_{n-2}$ *scorre su se stesso.* Segue di qui che ogni retta uscente da $a^1$ considerata come rigidamente collegata all'angoloide mobile $a^1$ descrive nel moto di questo un piano passante per la retta $a^0a^1$, vale a dire: affinchè una retta di $\alpha^0$ ed uscente da $a^1$ sia invariabilmente collegata all'angoloide mobile $a^1$ basterà che essa seguendo il moto di $\alpha^0$ descriva un piano passante per $a^0a^1$. Perciò l'asse $r$ sopradetto è collegato invariabilmente all'angoloide $a^1$, cioè *mantiene un angolo costante colla retta $a^0a^1$*. Ciò equivale a dire che il tubo imprimitivo di ampiezza $d^{n-1}\cdot p_n$ predetto è *trapezoidale* ([$D$] § 5.°). Se dunque $d\tau$ è l'ampiezza areale del quadrilatero piano descritto normalmente ad $\alpha^0$ dalla altezza del tubo piramidale generatore, si avrà (l. c.)

$$d^{n-1}\cdot p_n = \frac{d^{n-2}\cdot U_{01}}{n-1}\, d\tau. \tag{8}$$

Si conclude così che nel caso Euclideo

$$T_{(s)} = \frac{\sqrt{D}}{n!}. \tag{11}$$

(Cfr. Schoute, *Mehrdimensionale Geometrie*, vol. II, pag. 123, 1905).

§ 6.

## Applicazioni allo spazio a tre dimensioni.

**Volume del tetraedro.** — Se $n=3$, $T_{(\sigma)}$ è il volume del tetraedro in funzione dei suoi diedri $\sigma$, $U_{hj}$ è lo spigolo opposto ad $s_{hj}$ e la (5) del § 4.° ci dà:

$$d\cdot T_{(\sigma)} = \frac{1}{2}\left\{ \cdot s_{23}\, d\sigma_{01} + \cdot s_{13}\, d\sigma_{02} + \cdot s_{12}\, d\sigma_{03} + \cdot s_{01}\, d\sigma_{23} + \cdot s_{02}\, d\sigma_{13} + \cdot s_{03}\, d\sigma_{12} \right\}. \qquad (1)\,(*)$$

Ora sappiamo che

$$\cos \cdot s_{23} = \frac{\nabla_{23}}{\sqrt{\nabla_{23}}\sqrt{\nabla_{33}}}, \text{ donde } \operatorname{sen} \cdot s_{23} = \frac{\sqrt{\nabla_{22}\nabla_{33} - \nabla_{23}^2}}{\sqrt{\nabla_{22}}\sqrt{\nabla_{33}}};$$

e poichè (Pascal, *I determinanti*) risulta:

$$\nabla_{22}\nabla_{33} - \nabla^2_{23} = \nabla\,(\pi_{00}\pi_{11} - \pi^2_{01}) = \nabla\,(1 - \cos^2\sigma_{01}) = \nabla \operatorname{sen}^2 \sigma_{01}, \tag{2}$$

si potrà prendere

$$\operatorname{sen} \cdot s_{23} = \frac{i\,(-\nabla)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \sigma_{01}}{\sqrt{\nabla_{22}}\sqrt{\nabla_{33}}},$$

donde

$$\cdot s_{23} = \frac{1}{2i} \log \frac{\nabla_{23} - (-\nabla)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \sigma_{01}}{\nabla_{23} + (-\nabla)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \sigma_{01}}. \tag{3}$$

Ora per la (2) abbiamo:

$$(\nabla_{23} - (-\nabla)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \sigma_{01})(\nabla_{23} + (-\nabla)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \sigma_{01}) = \nabla^2_{23} + \nabla \operatorname{sen}^2 \sigma_{01} = \nabla_{22}\nabla_{33};$$

---

(*) Della pregevole tesi di laurea del Sig. Dott. Ferdinand Dannmayer: *Die Oberflächen und Volumenberechnung für den Lobatschefskijschen Raum mit besonderer Berucksichtigung der Rotationskörper und Polyeder* (Gottingen 1904 druck der Univ. Buchdruckerei von W. Fr. Kästner), inviatami gentilmente dall'A. lo scorso agosto, ho saputo che la (1) è stata trovata prima di me del Sig. Richmond H. W. nel 1903 (*The volume of a tetraedron in elliptic space: Quaterly Journal*). Veramente il prof. Bonola al quale l'avevo comunicata nella primavera del 1906 mi aveva assicurato che la formula non gli giungeva nuova, ma non mi aveva date ulteriori informazioni. Sono lieto ora di riconoscere al Sig. Richmond la proprietà della (1).
Settembre 1907.

# GEROLAMO CAMPAGNOLA E ANTONIO TEBALDEO

Due delle quattro miscellanee muratoriane del Tebaldeo, che si conservano nella Biblioteca Estense, assai preziose per gli studiosi della poesia italiana dei secoli XV e XVI (1), contengono alcuni piccoli componimenti poetici, che, da un canto, lumeggiano relazioni intercedute fra uno dei maggiori lirici cortigianeschi del sec. XV e il più anziano dei Campagnola, noti nella storia artistica di Padova, e, dall' altro, accrescono di qualche fiore modesto, ma non vano, il piccolo mazzetto di notizie, che sul conto di quest' ultimo ci ha risparmiato l' avarizia del tempo.

Del Tebaldeo non occorre qui rinfrescare la memoria; e quanto d' inedito dei suoi scritti poetici, così latini come volgari, conservano e queste e le altre miscellanee estensi, sarà da noi studiato e reso noto in prossima occasione.

Notizia più larga merita, invece, Gerolamo Campagnola, a riguardo del quale le incertezze dei dotti, che spesso lo hanno confuso con Gerolamo del Santo e con lo scultore veronese Gerolamo Campagna, e la scarsezza dei documenti hanno contribuito a render più fitte le tenebre.

Egli nacque a Padova, da cospicua famiglia, la quale (al dire del contemporaneo Matteo Bosso) *perpetua cum laude semper enituit,* probabilmente verso il 1435, e non prima del 1433. Che questa data sia attendibile, crediamo di poterlo accertare, quando si combini l' anno della morte del N., che, secondo una notizia documentata venuta da poco alla luce (2), sarebbe il 1522, con la notizia riferita dallo Scardeone (3), suo coetaneo ed amico, che lo dice morto pressochè novantenne. Non occorre quindi col Dekunert, a cui è sfuggito il cenno dell' erudito padovano, osservare che il far risalire la nascita del C. a prima del 1440 non concorda troppo con l' appellativo di *prudentem iuvenem,* datogli in un istrumento d' investitura livellario del 1473, dal Dekunert stesso primamente pubblicato (4). A ciò sarebbe, del resto, facile ribattere che l' estensore dell' atto di livello ricordava esattamente la

(1) Ne ha dato un indice sommario e rilevato brevemente l' alto valore GIULIO BERTONI in *Giorn. stor. d. lett. ital.,* XLVII, 1906, pag. 451-452.

(2) SILVIO DEKUNERT, *Qualche documento e notizia su Gerolamo Campagnola* (per nozze Camerini-De Fabii), Padova, 1905, p. 10 e 15.

(3) *De antiquitate urbis Patavii*, Basileae, 1560, p. 244.

(4) *Op. cit.*, p. 8 e 14.

# ATTI

DELLA

# SOCIETÀ DEI NATURALISTI

## E MATEMATICI

## DI MODENA

Serie IV Vol. IX - Anno XL.

1907

MODENA
COI TIPI DI G. T. VINCENZI E NIPOTI
Librai-Editori sotto il Portico del Collegio

1908.

G. SFORZA

# SUL VOLUME DEI POLIEDRI

## NELL' IPOTESI NON EUCLIDEA

(Seduta del 12 Marzo 1907).

In un mio lavoro presentato il 20 dicembre 1906 dal prof. Amaldi alla R. Accademia di Modena e che sarà inserito negli atti di questa, mi sono occupato di estensionimetria non Euclidea, e, relativamente ai poliedri dello spazio a tre dimensioni e più specialmente riguardo al tetraedro, sono giunto ad alcuni risultati che, sembrandomi notevoli, io comunico a questa rispettabile Società.

---

Per *struttura* di un poliedro si intenda l' insieme dei cicli in cui si separano i suoi vertici per formare i poligoni-facce. Ora da un teorema generale di Schubert (Cfr. SCHOUTE, *Mehrdimensionale Geometrie,* pag. 78-79) risulta che la determinazione metrica di un poliedro Euleriano di data struttura dipende da tante costanti arbitrarie quanti sono i suoi spigoli. Se dunque la curvatura $K$ dello spazio non è nulla (nel qual caso i diedri di un poliedro non sono legati a priori da alcuna relazione) si può concludere che un poliedro Euleriano di data struttura è determinato dai suoi diedri cioè il suo volume $V$ e i suoi spigoli sono funzioni dei suoi diedri. Quali funzioni siano gli spigoli $s$ dei diedri $\sigma$ si può stabilire con semplici equazioni trigonometriche, cosicchè gli spigoli $s$ si possono considerare qui come note funzioni dei diedri; allora io ho dimostrato che, *se* $V$ *è il volume,* $\sigma$ *un diedro generico ed* s *lo spigolo di sostegno di* $\sigma$, si avrà:

$$dV = \frac{1}{2K} \Sigma\, s\, d\sigma \qquad (1)$$

*essendo* dV *il differenziale totale di* V *considerato come funzione dei diedri* $\sigma$.

Da (1) si può ricavare il notevole teorema: *La somma dei volumi di due poliedri assolutamente reciproci aumentata della somma dei tetraedri contenuti dalle coppie di spigoli assolutamente reciproci dei due poliedri riempie tutto lo spazio projettivo.*

E questo teorema è analiticamente valido anche per $K < o$.

---

Io ho stabilita la (1) deducendola dal caso particolare del tetraedro pel quale l' ho originariamente dimostrata. Nel caso del tetraedro si possono facilmente esprimere gli spigoli $s$ pei diedri $\sigma$ nel seguente modo. Siano 0, 1, 2, 3 i vertici di un tetraedro e si indichi con $s_{ij}$ lo spigolo che unisce i vertici $ij$; sia poi $\sigma_{ij}$ il diedro *opposto* allo spigolo $s_{ij}$; allora la (1) prende intanto la forma

$$dV = \frac{1}{2K}\left(s_{01}\, d\sigma_{23} + s_{02}\, d\sigma_{31} + s_{03}\, d\sigma_{12} + s_{23}\, d\sigma_{01} + s_{31} d\sigma_{02} + s_{12} d\sigma_{03}\right) (*). \quad (2)$$

(*) Nel mio lavoro citato ho dimostrato analiticamente che, se $V$ è l'ipervolume di un $(n+1)$-edro $P$ di uno spazio a $n$ dimensioni di curvatura costante $K$, si ha: $(n-1)\, KdV = \Sigma\, sd\sigma$, ove $\sigma$ è un diedro generico di $P$ ed $s$ l'estensione dell' $(n-1)$-edro sostegno di $\sigma$; e da tal formula per $n = 3$ ho dedotta la (2). Ecco tuttavia un cenno di una dimostrazione elementare e diretta della (2), dimostrazione che non compare nel citato lavoro.

Si ponga per brevità, qualunque sia $x$, $\dot{x} = x\sqrt{K}$. Allora il settore infinitesimo conico di angolo $d\tau$ di altezza $h$ e di apotema $\rho$ ha un volume $dV = \frac{d\tau}{2K}(h - \rho \operatorname{tang} \dot{h} \cot \dot{\rho})$ (Cfr. Frischauf, *Elem. der absoluten Geom.*, pag. 99), la quale, quando $\omega$ sia l'inclinazione dell'apotema $\rho$ all'altezza $h$' si può scrivere anche $2KdV = (h - \rho \cos \omega)\, d\tau$. Di qui si deduce che, se $dV$ è il volume di un tetraedro $ABCD$ col diedro in $AB$ infinitesimo $(d\tau)$ e si pone $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $B\overline{A}C = A$, $A\overline{B}C = B$, si ha, a meno eventualmente di infinitesimi di second' ordine, $2KdV = (c - a \cos B - b \cos A)\, d\tau$. Facendo ora variare di infinitamente poco il solo vertice 0 del tetraedro finito 0123, la variazioae $\delta V$ del suo volume $V$ è la somma algebrica di tre tetraedri infinitesimi del tipo precedente; donde si ricava:

$$2K\delta V = s_{23}\delta\sigma_{01} + s_{31}\delta\sigma_{02} + s_{12}\delta\sigma_{03} + s_{01}(-\cos 0\overline{12}\delta\sigma_{03} - \cos 0\overline{13}\delta\sigma_{02})$$
$$+ s_{02}(-\cos 0\overline{21}\delta\sigma_{03} - \cos 0\overline{23}\delta\sigma_{01}) + s_{03}(-\cos 0\overline{31}\delta\sigma_{02} - \cos 0\overline{32}\delta\sigma_{01}).$$

Ora se in un triangolo sferico di angoli $A, B, C$ e lati $a, b, c$ varia infinitamente poco il solo vertice di $A$, si ha $\delta A = -\cos b \delta C - \cos c \delta B$.

Pongasi poi

$$\pi_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ -\cos\sigma_{ij} & (i -= j) \end{cases}$$

e

$$\nabla = \begin{vmatrix} \pi_{oo} & \pi_{o1} & \pi_{o2} & \pi_{o3} \\ \pi_{1o} & \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{2o} & \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{3o} & \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad \nabla_{ij} = \frac{\partial \nabla}{\partial \pi_{ij}}; \tag{3}$$

allora si ha:

$$s_{23} = \frac{1}{2i\sqrt{K}} \log \frac{\nabla_{23} + (-\nabla)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \sigma_{01}}{\nabla_{23} - (-\nabla)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \sigma_{01}} \tag{4}$$

e simili.

La (2), ritenendo costanti i cinque diedri $\sigma_{o2}$, $\sigma_{o3}$, $\sigma_{23}$, $\sigma_{31}$, $\sigma_{12}$, ci dà allora

$$V = \frac{1}{4iK^{\frac{3}{2}}} \int_{\overset{0}{\sigma}_{01}}^{\sigma_{01}} \log \frac{\nabla_{23} + (-\nabla)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \sigma_{01}}{\nabla_{23} - (-\nabla)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \sigma_{01}} \, d\sigma_{01} \,, \tag{5}$$

ove si dimostra che $\overset{0}{\sigma}_{01}$ è un valore di $\sigma_{o1}$ che rende $\nabla = o$.

Così $V$ è ottenuto con una quadratura ma da eseguirsi sopra una funzione contenente 5 parametri arbitrari. Ora io ho dimo-

Per la qual formola la precedente assume la forma (2). Non vi è ora alcuna difficoltà ad estendere la (2) anche al caso della variazione infinitesima arbitraria simultanea di tutti i quattro vertici $0, 1, 2, 3$. Questa dimostrazione geometrica è valida in una porzione reale dello spazio la quale per $K < 0$ sia interna all'assoluto e per $K > 0$ sia interna a una sfera di diametro $\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$, affinchè avvenga che per ogni triangolo in essa contenuto la somma di due angoli qualunque sia minore di due retti. Ma con considerazioni relative alla continuazione delle funzioui analitiche si estende facilmente la validità della (2) a qualunque tetraedro reale o complesso.

strato che la (5) si può sostituire con *una* quadratura da eseguirsi sopra una funzione *numerica* della sola variabile d'integrazione e precisamente che, ponendo

$$T_x = \frac{1}{2iK^{\frac{3}{2}}} \int_x^{\frac{1}{2}\pi} \log 2 \operatorname{sen} x \, dx \ (*), \tag{6}$$

sarà $V$ un aggregato di valori della funzione $T_x$ per valori diversi dell'argomento $x$ calcolabili a mezzo dei diedri $\sigma$; per modo che, quando sia calcolata una tavola dei valori numerici della funzione $T_x$, si potrà calcolare il volume di qualunque tetraedro.

Se il tetraedro è asintotico (cioè con un vertice, almeno, all'infinito) l'espressione indicata di $V$ si ottiene facilmente. Siano infatti $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ i diedri del triedro asintotico ed $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ i diedri ad essi rispettivamente opposti nel dato tetraedro di volume $V$. Per essere $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ si trova intanto:

$$(-\nabla)^{\frac{1}{2}} = \cos\alpha' \operatorname{sen}\alpha + \cos\beta' \operatorname{sen}\beta + \cos\gamma' \operatorname{sen}\gamma . \tag{7}$$

Allora, posto

$$\alpha + \beta' + \gamma' - \pi = 2\varepsilon_1 \ , \ \alpha' + \beta + \gamma' - \pi = 2\varepsilon_2 \ , \ \alpha' + \beta' + \gamma - \pi = 2\varepsilon_3 \ , \tag{8}$$

a mezzo della (2), (4) e (6) si trova che

$$\begin{aligned} V = T_\alpha + T_\beta + T_\gamma &+ \left\{ - T_{\alpha-\varepsilon_1} + T_{\beta'-\varepsilon_1} + T_{\gamma'-\varepsilon_1} - T_{\varepsilon_1} \right\} + \\ &+ \left\{ T_{\alpha'-\varepsilon_2} - T_{\beta-\varepsilon_2} + T_{\gamma'-\varepsilon_2} - T_{\varepsilon_2} \right\} + \\ &+ \left\{ T_{\alpha'-\varepsilon_3} + T_{\beta'-\varepsilon_3} - T_{\gamma'-\varepsilon_3} - T_{\varepsilon_3} \right\} . \end{aligned} \tag{9}$$

(*) Ponendo $z = \operatorname{tang} \frac{x}{2}$, $T_x$ prende la forma

$$\frac{1}{iK^{\frac{3}{2}}} \int_z^1 \left( \log \frac{4z}{1+z^2} \right) \frac{dz}{1+z^2} ;$$

e sotto questa forma $T_x$ rientra nella categoria degli integrali studiati dal compianto prof. Besso nel *Giorn. di Batt.*, 1888, pag. 356: « Sull'integrale del prodotto di una funzione razionale pel logaritmo di una funzione razionale ».

Se il tetraedro non è asintotico, si indichino con $A$, $B$, $C$, $D$ i suoi vertici e con $O$ un punto qualunque dell'assoluto; si avrà (BALTZER, *Stereom.*, pag. 141) in valore e segno

$$ABCD = ABCO + BADO + ACDO + CBDO \quad , \tag{10}$$

sicchè $ABCD$ è un aggregato di quattro tetraedri asintotici (con segni opportuni), i cui diedri si possono calcolare in funzione dei diedri di $ABCD$ e di due costanti arbitrarie; applicando a ciascuno di tali tetraedri asintotici la (9) si ottiene $ABCD$ come un aggregato di valori della funzione $T_x$.

È da notare che la (9) è valida anche per un tetraedro 2, 3, 4 volte asintotico, basta farvi nulla una, due o tutte tre le $\varepsilon$. Allora, osservando che la $T_x$ data da (6) sodisfa alle seguenti relazioni:

$$\left.\begin{array}{l} T_x = 2\left(T_{\frac{x}{2}} - T_{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}\right) , \quad T_x + T_{-x} = \dfrac{\pi x}{2K^{\frac{3}{2}}} , \ \max T_x = T_{\frac{\pi}{6}} \\ T_{\frac{\pi}{2}} = 0 , \ T_0 = 0 , \ T_\pi = 0 , \ T_{\pi - x} = - T_x , \ T_{\frac{\pi}{2}+x} = - T_{\frac{\pi}{2}-x} \end{array}\right\} \tag{11}$$

e che da (8) si ricavano le relazioni

$$\alpha - \varepsilon_1 = \alpha' - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 , \ \beta - \varepsilon_2 = \beta' - \varepsilon_2 - \varepsilon_1 , \ \gamma - \varepsilon_3 = \gamma' - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 , \tag{12}$$

si perviene da (9) alle formule seguenti:

$$\left.\begin{array}{ll} V = T_\alpha + T_\beta + T_{\alpha'} + T_{\beta'} + T_{\gamma' - \varepsilon_1} + & \\ \quad + T_{\gamma' - \varepsilon_2} - T_{\varepsilon_1} - T_{\varepsilon_2} \ (\varepsilon_3 = 0 & \text{tetraedro diasintotico}) \\ V = T_\alpha + T_\beta + T_\gamma + T_{\alpha'} + & \\ \quad + T_{\beta'} + T_{\gamma'} - T_{\varepsilon_1} \ (\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0 & \text{» triasintotico}) \\ V = 2\,(T_\alpha + T_\beta + T_\gamma) \quad (\alpha' = \alpha , & \\ \quad \beta' = \beta , \ \gamma' = \gamma , \ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0 & \text{» tetrasintotico}). \end{array}\right\} \tag{13}$$

Facendo nella prima della (13)

$$\alpha' = \alpha , \ \beta' = \beta = \frac{\pi}{2} , \ \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha , \ \gamma' = \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\alpha}{2} ,$$

si ottiene per la prima delle (11)

$$V = T_\alpha . \tag{14}$$

Facendo nella terza delle (13)

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3},$$

si ottiene (per la prima delle (11))

$$V = 6\, T_{\frac{\pi}{3}} = 4\, T_{\frac{\pi}{6}}, \tag{15}$$

la quale dà il volume del tetraedro tetrasintotico regolare in una forma più semplice di quella data da Liebmann nella sua recente « *Nichteuklidische Geometrie* » (Sammlung Schoute, 1905, pag. 162), e, per la terza delle (11), prova il carattere di massimo del tetraedro tetrasintotico regolare fra tutti i tetraedri tetrasintotici.
Si deve notare infine che, poichè la (10) sussiste anche se $O$ è immaginario, la indicata decomposizione di $V$ può essere fatta anche nel caso di $K > o$ cioè nel caso ellittico; infatti la (9) ha un' origine puramente analitica.

---

Voglio ora porre brevemente in relazione questo metodo con quello di Lobatschefsky (Vedi p. es. LIEBMANN, l. c. pag. 156 e seg.). A tale scopo conveniamo che, se un tetraedro ha tre diedri retti, di cui due opposti, il tetraedro sia detto *elementare* e che dei rimanenti tre diedri i due opposti siano detti *laterali* e *medio* il terzo. Allora, calando da un vertice di un tetraedro qualunque la perpendicolare sulla faccia opposta e dal piede di questa le tre perpendicolari sui tre lati della base, il tetraedro risulta un aggregato di sei tetraedri elementari positivi o negativi aventi i vertici nei piedi delle quattro perpendicolari sudette e nei vertici del tetraedro. Così Lobatschefsky ha ridotto la determinazione del volume di un tetraedro a quella dell' elementare. Egli ha poi provato che un tetraedro elementare non asintotico è un aggregato di quattro tetraedri elementari monoasintotici due positivi e due negativi, e così ha ridotto la questione alla determinazione del volume del tetraedro elementare monoasintotico. Se si osserva che in un tetraedro elementare monoasintotico il diedro medio deve essere complementare di un laterale, si trova colla (9) che il volume $T_{\alpha,\alpha'}$ del tetraedro elementare monoasintotico di diedri laterali $\alpha$, $\alpha'$ e di diedro medio $\frac{\pi}{2}-\alpha$ assume successivamente per le (11) le forme seguenti:

$$T_{\alpha,\alpha'}=\frac{1}{2}\left\{T_{\alpha'+\alpha}-T_{\alpha'-\alpha}+2\,T_{\frac{\pi}{2}-\alpha}\right\}=\frac{1}{2}\left\{T_{\alpha'+\alpha}-T_{\frac{\pi}{2}+\alpha}\right\}-$$

$$-\frac{1}{2}\left\{T_{\alpha'-\alpha}-T_{\frac{\pi}{2}-\alpha}\right\}=\frac{1}{4iK^{\frac{3}{2}}}\left\{\int_{\alpha'+\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}\log 2\operatorname{sen} x\,dx-\right.$$

$$\left.\int_{\alpha'-\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\log 2\operatorname{sen} x\,dx\right\}=\frac{1}{4iK^{\frac{3}{2}}}\int_{\alpha'}^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{\operatorname{sen}(\varphi+\alpha)}{\operatorname{sen}(\varphi-\alpha)}\,d\varphi\,; \quad (16)$$

e la (16), per $K=-1$, è appunto la formula trovata da Lobatschefsky, formula che può anche dedursi direttamente da (5).

È però da osservare che il metodo di Lobatschefsky non si applica ai tetraedri due o più volte asintotici, e che in ogni caso il calcolo numerico di (16) si fa più agevolmente colla decomposizione in elementi della forma $T_x$ che richiedono l'uso di una tavola a una sola entrata dei valori numerici di $T_x$.

Chiuderò facendo notare che da (14) *risulta che* $T_x$ *è il volume del tetraedro elementare due volte asintotico di diedri laterali* $x$ *e quindi di diedro medio* $\frac{\pi}{2}-x$; e che anzi con questo solo significato geometrico di $T_x$ e senza conoscerne la forma analitica (6) si possono per $K<o$ dimostrare geometricamente gran parte delle (11) nonchè le (13) e (9) stabilendole gradatamente pel tetraedro 4, 3, 2, 1 volta asintotico.

Mi riservo di sviluppare in altra Nota la formula generale (10) pel tetraedro non asintotico (*).

(*) Aggiungo qui le seguenti notizie storiche, che, colla gentile cooperazione del prof. Amaldi, ho potute raccogliere poco prima della stampa di questa Nota.

Nel caso particolare di un tetraedro elementare con un sol diedro (laterale) variabile e nell'ipotesi $K=-1$ la (2) è stata trovata da Gauss (salva la mancanza del fattore $\frac{1}{2}$ osservata dal prof. Stäckel; *Gauss-Werke*, Vol. VIII, pag. 228), e più tardi (1893) del prof. Simon

(*Math. Ann.*, Vol. 42 « *Zur Volumbestimmung in der Lobatschefsy-schen Geom.* » formola (1) ultima linea della pag. 479); ma il risultato del Simon è oscurato da una inavvertenza dell' A. per la quale avviene che quel simbolo $\alpha$, che per l' esattezza della formula dovrebbe rappresentare una sezione retta del diedro variabile, ne rappresenta invece nella figura una sezione obliqua.

Sembra poi che Bolyai, che pure ha considerato il tetraedro elementare con un sol diedro (laterale) variabile, non abbia ottenuto il corrispondente caso particolare della (2) in modo da porre in evidenza lo spigolo. (Cfr. Stäckel, *Math. und naturw. Berichte aus Ungarn*, 1902, Vol. XVIII, pag 297-307. « *Untersuchungen aus der absoluten Geom. aus Johan Bolyai's Nachlass* »). Per queste ricerche mi sono giovato delle indicazioni contenute nei preziosi lavori storici del prof. Bonola.