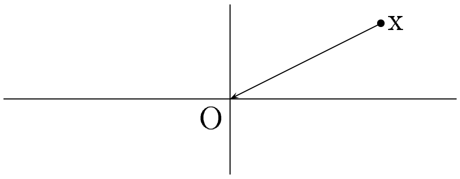
Example

1. Contractible space

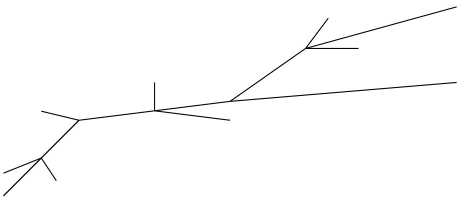
정의 1 *A space X is contractible to $x_0 \in X$ if*
$id_X \simeq c$, *where* $c : X \to \{x_0\} \subset X$ *is a constant map.*

예 1. $\mathbb{R}^n$ is contractible.



F(t,x)=tx 로 주면 이는 id 와 constant map 0 간에 homotopy 를 준다.

2. D^n is contractible. 역시 F(t,x)=tx 로 주면 된다.
3. Any space which is homeomorphic to a contractible space is contractible.
4. A "tree" is contractible.



5. S^1 is not contractible.

Remark.
1. *contractible* $\Rightarrow$ *path connected:*
임의의 두 point는 x_0를 통해 path로 연결된다.

2. X *is contractible to* $x_0 \in X \Rightarrow X$ *is contractible to any other point of* X :
X가 contractible to x_0 이면 path connected 이므로 $\forall\, x_1 \in$ 에 대해 x_0, x_1 사이에 path ρ가 존재한다. F 를 id_X 와 c_{x_0} 간의 homotopy라 할 때 아래와 같이 정의된 H는 id_X와 c_{x_1} 사이에 원하는 homotopy를 준다.

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{if } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \rho(2t-1) & \text{if } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

3. *X is contractible* $\Leftrightarrow X \simeq \{point\}$ *:*
(⇒ 증명) $\{x_0\} \underset{i}{\hookrightarrow} X \underset{c_{x_0}}{\rightarrow} \{x_0\}$에서
$c_{x_0} \circ i = id_{x_0}$ 이고 X 가 contractible 이므로 $i \circ c_{x_0} \simeq id_X$ 이다. 따라서 $X \simeq \{x_0\}$ 이다.
(⇐ 증명) $X \simeq \{x_0\}$ 이므로 homotopy equivalence f: $X \to \{x_0\}, g : \{x_0\} \to X$ 가 존재한다. 이 때 f는 constant map c_{x_0} 가 되고 따라서 $g \circ f$ 역시 constant map이 된다. 그런데 $g \circ f \simeq id_X$ 이므로 X 는 contractible하다.

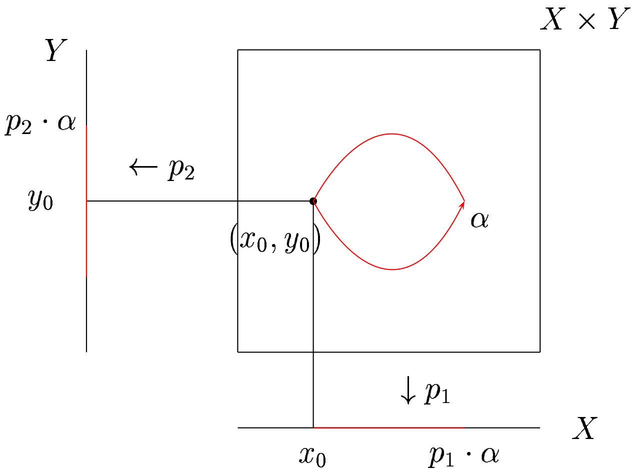
정리 1 *X is contrantible* $\Rightarrow \pi_1(X) = 0$.

증명 $X \simeq \{x_0\}$ 이므로 $\pi_1(X) \cong \pi_1(\{point\}) = 0$. □

2. $\pi_1(X \times Y)$

정리 2 *If X and Y are path connected, then* $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

증명 Define $\phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$,
$$[\alpha] \mapsto ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha])$$
where p_1, p_2 are projections to X and Y respectively.



일반적으로 두 homomorphism $\phi_1 : G \to H_1$, $\phi_2 : G \to H_2$ 에 대해 $\phi(g) = (\phi_1(g), \phi_2(g)) : G \to H_1 \times H_2$ 역시 homomorphism이 되므로 위에서의 ϕ 는 homomorphism이 된다. 이제 ϕ의 역함수를 찾기 위해 아래와 같이 ψ를 정의하자.

$$\psi : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$$
$$([\beta], [\gamma]) \mapsto [\delta]$$
,where $\delta(t) = (\beta(t), \gamma(t))$

이 ψ는 ϕ 의 역함수가 되고 이제 ψ 가 잘 정의되었는지만 살펴보면 된다.
F : $\beta \sim \beta'$, G : $\gamma \sim \gamma'$ 일 때 $H(t, s) = (F(t, s), G(t, s))$ 로 주면 이는 δ 와 δ' 사이의 homotopy를 주므로 ψ 가 잘 정의되었음을 알 수 있다.

□

예: $\pi_1(S^1 \times S^1) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2$

$\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$

$\pi(\mathbb{R}^n \times S^1) = \mathbb{Z}$

3. Topological group

정리 3 *G : a path connected topological group with identity e*
$\Rightarrow \pi_1(G, e)$ *is abelian.*

증명 $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e)$ 에 대해 $[\alpha][\beta] = [\beta][\alpha]$ 임을 보이기 위해 $[\alpha][\beta][\alpha]^{-1}[\beta]^{-1} = 1$ 임을 보이자. $[\alpha][\beta][\alpha]^{-1}[\beta]^{-1} = [\alpha * \beta * \overline{\alpha} * \overline{\beta}] \simeq 1$ 을 보이기 위해 $\alpha * \beta * \overline{\alpha} * \overline{\beta}$ 를 다음과 같이 보자.

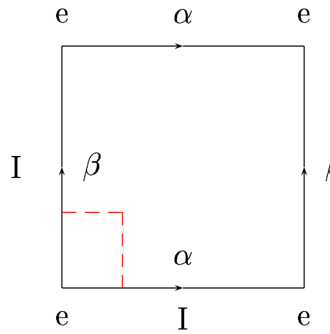


그림 1

$\xrightarrow[\exists F\ ?]{}$

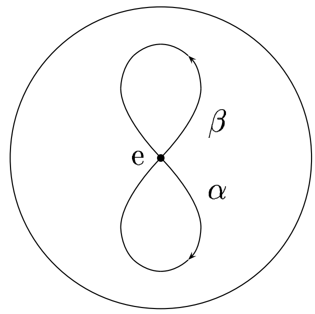


그림 2

그림 2에서 먼저 보면,
F : $I^2 \to G$ given by F(t,s)=$\alpha(t)\beta(s)$ 는 group G 안에 곱이 정의되므로 I^2상에서 연속함수로 잘 정의되고 I^2의 boundary는 사실상 $\alpha * \beta * \overline{\alpha} * \overline{\beta}$를 준다.
따라서
$[\alpha][\beta][\alpha]^{-1}[\beta]^{-1} = F_\sharp([\partial I^2]) = F_\sharp(1) = 1.$

$\square$

숙제3. $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, $\alpha : S^1 = \partial D^2 \to X$ 에 대해
$[\alpha] = 1$ *if and only if* α *can be extended to* D^2