II. Review of covering space

Definitions and Examples

정의 1 *Let $p : \widetilde{X} \to X$. $\widetilde{X}$ is a covering space of X with a covering map p if*
(1) p is onto and
(2) each $x \in X$ has a neighborhood U which is evenly covered, i.e.,
$p^{-1}(U) = \coprod_{a \in A} V_a$ *is a disjoint union of open sets V_a of $\widetilde{X}$ such that*
$p|_{V_a} : V_a \to U$ *is a homeomorphism, $\forall\ a \in A$.*

Examples.
1. $id : X \quad \to \quad X$.
2. $p : \mathbb{R} \quad \to \quad S^1(\subset \mathbb{C})$ given by $p(x) = e^{2\pi i x}$.
3. $p : \mathbb{C} \quad \to \quad \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ given by $p(z) = e^z$.
4. $p : S^1 \quad \to \quad S^1$ given by $p(z) = z^n$.

이와 같이 p^{-1}의 image가 n개인 경우를 n-sheeted covering 혹은 n-fold covering 이라고 부른다.

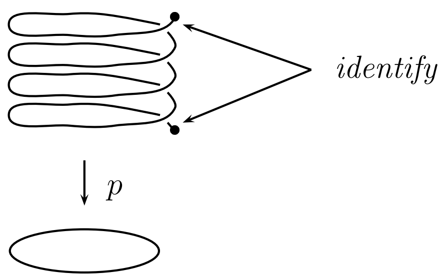

그림 1: 4-fold covering of S^1

5. $p : S^n \quad \to \quad \mathbb{R}P^n = S^n/\sim$ where $x \sim -x$.

이 경우 quotient map p는 covering map이 되고 특히 two fold covering(double covering) 이 된다.

6. $p : \mathbb{R}^2 \quad \to \quad T^2 = S^1 \times S^1$ given by $(x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$.

Excercise. If $p : \widetilde{X} \to X$, $q : \widetilde{Y} \to Y$ are covering maps, then
$p \times q : \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to X \times Y$ is also a covering map.

7. 3-fold covering of figure eight
아래 그림과 같이 figure eight의 copy 3개를 잘라서 표시한대로 다시 붙이면 된다.

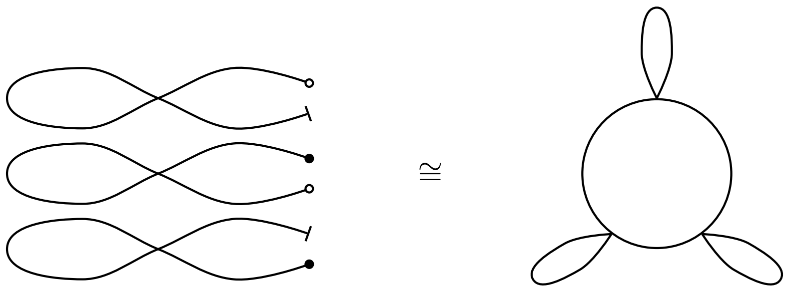

그림 2: 3-fold covering of figure eight

마찬가지 방법으로 torus의 경우에도 단면을 잘라서 붙이면 되는데, 그 결과 torus의 3-fold covering은 torus이며, genus가 2인 surface의 3-fold covering은 genus가 4인 surface가 됨을 알 수 있다.

Note.
1. M is a ($\mathcal{C}^\infty$-)manifold $\Rightarrow \widetilde{M}$ is also a ($\mathcal{C}^\infty$-)manifold.
(증명) 각 $x \in \widetilde{M}$에 대해 $p(x) \in M$ 가 coordinate chart (U,φ) 를 가지고, 또한 $p(x)$ 는 evenly cover 되는 neighborhood V 를 가진다. 이 때 $U \cap V$ 에 대해 $p^{-1}(U \cap V)$를 생각해 보면, 이 중 x를 포함하는 $U \cap V$의 copy가 있고 이 copy와 $\varphi \circ p$가 x의 coordinate chart 를 준다.
Exercise. $\mathcal{C}^\infty$- case에는 이렇게 정의된 coordinate chart들이 서로 $\mathcal{C}^\infty$-relate되어 있음을 보이라.

2. M is orientable $\Rightarrow \widetilde{M}$ is also orientable.
(증명) 먼저 $\widetilde{M}$의 각 점 x에 orientation을 주자. $\widetilde{M}$의 orientation은 local homeomorphism p 를 이용하여 $p(x)$의 orientaion을 그대로 가져다 쓴다. 그러면 각 $x \in \widetilde{M}$에 대해 orientation이 locally constant가 되는 $p(x)$의 근방 U를 잡을 수 있고, 또한 $p(x)$에서 evenly cover 되는 V를 잡을 수 있다. 이 때 $p^{-1}(U \cap V) = \coprod_{a \in A} W_a$ 중 x를 포함하는 W_a에서 orientation은 p에 의해 $U \cap V$의 orientation과 같으므로 locally constant이다.

3. M is a compact manifold, p is a finite sheeted covering $\Rightarrow \widetilde{M}$ is compact.
(증명) M이 compact하므로 evenly cover되는 coordinate neighborhood 유한개로 덮을 수 있고, compact set의 finite union은 compact이므로 자명하다.

4. Every non-orientable manifold has an orientable double covering manifold.
(증명) non-orientable manifold의 경우 각 점마다 2개의 orientation이 존재하는데, 이를 double covering의 각 sheet에 분리하여 할당한 후 orientation이 일치하도록 붙여나가면 double covering manifold가 orientable하게 만들 수 있다.

(예) Möbius band의 double covering은 두번 꼬인 band가 되는데 이는 annulus와 같고 3-fold covering은 다시 Möbius band가 된다. 같은 방법으로 Klien bottle의 double covering은 torus가 된다.

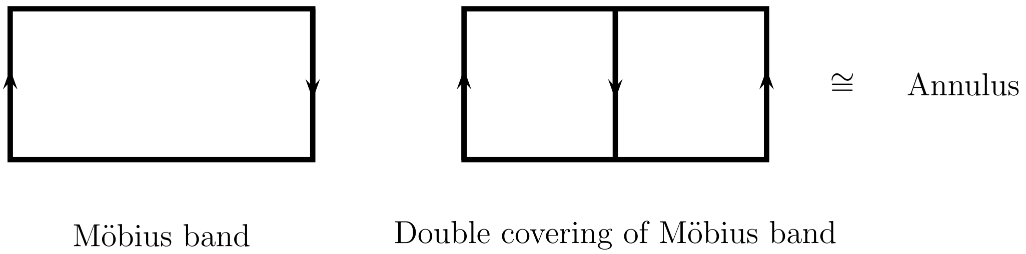

그림 3: Möbius band의 double covering

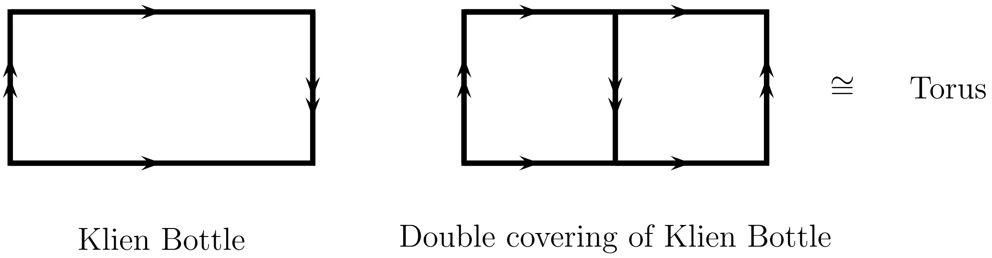

그림 4: Klien Bottle의 double covering

5. M이 orientable이고 genus가 g인 경우, 이에 따른 $\widetilde{M}$를 살펴보자.
위의 내용에 따라 $\widetilde{M}$는 역시 orientable이므로 χ만 알면 $\widetilde{M}$를 결정할 수 있

다.($\chi = 2-2g$) 그런데, $\widetilde{M}$가 n-fold라면 M의 triangulation을 $\widetilde{M}$ 위로 올리면 V, E, F 모두 n배가 되므로 χ 역시 n배가 된다. ($\chi = V - E + F$) 비슷한 방법으로 M이 non-orientable일 때도 n-fold covering $\widetilde{M}$의 χ를 알 수 있고, orientability가 결정되면 $\widetilde{M}$를 결정할 수 있다.

숙제4. Let $M, \widetilde{M}$ be a closed surface. Suppose $\chi(\widetilde{M}) = n\chi(M)$. Is there a n-fold covering $\widetilde{M} \to M$?

non-covering

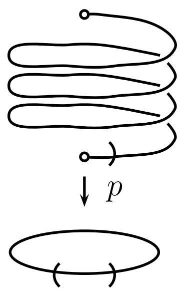

그림 5: non-covering

위 그림에서 끝점의 p-image 점 근방에서는 evenly cover되는 근방을 잡을 수 없으므로 covering map이 될 수 없다.
그러나, 이 때 p는 *local homeomorphism*이 되는데, 어떤 map $f : X \to Y$가 *local homeomorphism*이라는 것은 임의의 $x \in X$에 대하여 x의 neighborhood U와 $f(x)$의 neighborhood V가 존재하여 $f|_U$가 U와 V사이의 homeomorphism이 된다는 것이다.

Remark
(1) $p^{-1}(x)$ is discrete.
(2) A covering $p : \widetilde{X} \to X$ is a local homeomorphism, and hence, an open map.
(3) If $p : \widetilde{X} \to X$ is a covering and $A \subset X$, then $p^{-1}(A) \xrightarrow{p} A$ is a covering.