Lifting Property

정리 1 ***(Uniqueness of lifting)***
주어진 covering p:$(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to (X, x_0)$에 대해 Y가 connected이고 $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$가 lifting $\widetilde{f} : (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$을 가지면, 이는 unique하다.

$$\begin{array}{ccc} & & (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \\ & \exists \widetilde{f} \nearrow & \downarrow p : \text{covering} \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{f}, \text{ a lifitng of } f, \text{ is unique if it exists.}$$

증명
$\widetilde{f}, \widetilde{f}'$를 f의 lifting이라 하자.

A $:= \{y \in Y | \widetilde{f}(y) = \widetilde{f}'(y)\} \ni y_0$

A is open :
$y \in A$에 대해 f(y)의 evenly covered된 open neighborhood U를 찾자.
그러면 $p^{-1}(U) = \coprod_\alpha \widetilde{U_\alpha}$이고, $\exists \widetilde{U_\alpha} \ni \widetilde{f}(y) = \widetilde{f}'(y)$이다.
그러면 $y \in \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{U_\alpha}) \cap \widetilde{f}'^{-1}(\widetilde{U_\alpha}) \subset A$이므로 A가 open이다.

마찬가지로 $A^c = \{y \in Y | \widetilde{f}(y) \neq \widetilde{f}'(y)\}$도 open이다.

그런데 Y가 connected이므로 $A^c = \phi$이고 이로서 uniqueness of lifting이 증명되었다. □

보조정리 2 ***(Lebesgue Covering lemma)***
In a compact metric space, every open cover $\mathcal{U}$ has a Lebesgue number, i.e. , $\exists \epsilon > 0$(depending on $\mathcal{U}$) s.t. $\forall$ $A \subset X$ with diam(A)$< \epsilon$, $\exists$ $U \in \mathcal{U}$ s.t. $A \subset U$.

증명
D를 $\{$diam(A) $\in \mathbb{R}|$ A is not contained in any $U \in \mathcal{U}\}$라고 두자. 이런 A를 "big set"이라 부르자.
그러면 ϵ=inf D $>$0임을 보이면 증명이 끝난다.
만약 inf D가 0 이라면 $\forall n, \exists A_n$: big set s.t. diam$(A_n) < \frac{1}{n}$ 이고, $x_n \in A_n$ 인 $\{x_n\}$을 찾을 수 있다.
그러면 X 가 compact하므로 $x_n \to x$(by passing to a subsequence)인 x가 존재한다.
그러면 x를 포함하는 U$\subset \mathcal{U}$에 포함되는 A_n(n이 충분히 클 때)들을 찾을 수 있고 이는 big set의 정의에 모순된다. □

정리 3 ***(Unique path lifting property)***

Let $p : \widetilde{X} \to X$ be a covering map and let $\alpha : I \to X$ be a path with $\alpha(0) = x_0 \in X$ and $p(\widetilde{x_0}) = x_0$. Then α has a unique path lifting $\widetilde{\alpha} : I \to X$ with $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{x_0}$ i.e., $p \circ \widetilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$. $\forall\ t \in I$.

증명

(Existence)

For each t, $\alpha(t) \in X$ has an open neighborhood U_t which is evenly covered by $\coprod_{a \in A} V_{t,a}$. Since I=[0,1] is compact, we can choose a Lebesgue number $\epsilon > 0$ for a cover $\{\alpha^{-1}(U_t) | t \in I\}$ of I. Choose a partition of I,
$0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n+1} = 1$ so that $t_{i+1} - t_i < \epsilon, \quad i = 1, ...n.$
Then note that $\alpha[t_i, t_{i+1}] \subset U_t$ for some t and we lift $\alpha|_{[t_i,t_{i+1}]}$ inductively :
Suppose $\alpha|_{[t_0,t_i]}$ is already lifted (note that the initial point x_0 is lifted to $\widetilde{x_0}$).
Then $\alpha[t_i, t_{i+1}] \subset U_t$ for some t and $p^{-1}(U_t) = \coprod_{a \in A} V_{t,a}$ and there exists a unique $a \in A$ such that $\tilde{\alpha}(t_i) \in V_{t,a}$.
And since $p|_{V_{t,a}} : V_{t,a} \to U_t$ is homeomorphism we can lift $\alpha|_{[t_i,t_{i+1}]}$ using $(p|_{V_{t,a}})^{-1}$ and the proof is completed.

(Uniqueness)

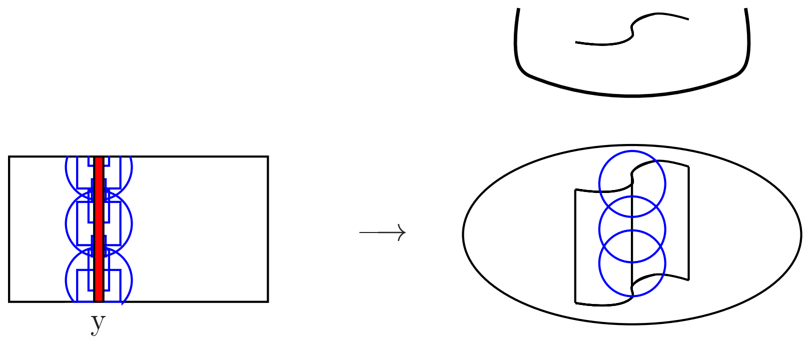
The uniqueness follows from the uniqueness property of general lifting. $\square$

정리 4 ***(Covering homotopy property)***

Let $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to (X, x_0)$ be a covering.
Let $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ and $\widetilde{f} : (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ be a lifting of f.
Then for a homotopy $F : Y \times I \to X$ s.t. $F|_{Y \times \{0\}} = f$, there exists a unique lifting $\widetilde{F}$ of F s.t. $\widetilde{F}|_{Y \times \{0\}} = \widetilde{f}$.

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, "\exists \widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & (X, x_0) \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[ur, "\exists ! \widetilde{F}"] \arrow[r, "F"] & X \end{tikzcd} \quad \text{s.t. } \widetilde{F}|_{Y \times \{0\}} = \widetilde{f}$$

증명
Step 1 . Lift F on $U_y \times I$ for each $y \in Y$.
여기서 y의 neighborhood U_y는 I의 compactness를 이용하여 construct한다.



1)$f(y \times I)$ 위에서 evenly cover 되는 covering $\{W_t\}$을 잡는다.
2) 이 때 $\{f^{-1}(W_t)\}$는 $y \times I$의 covering이 되고 각 점 (y,t)마다 $f^{-1}(W_t)$에 포함되는 product neighborhood $U_t \times V_t$를 잡으면 I의 compactness에 의해 이들 중 유한개로 $y \times I$를 cover할 수 있다.
3) 이 finite한 product neighborhood들에서 U_t들의 intersection을 U_y라 둔다.
4) 다음에 $U_y \times I$를 lift하기 위하여 I에 적당히 partition을 주어 각 $U_y \times [t_i, t_{i+1}]$이 2)에서 잡은 finite product neighborhood에 포함되도록 한다.
5) path lifting 때와 마찬가지로 inductive하게 lifting한다.

Step 2. Piece together $\widetilde{F}|_{U_y \times I}$ to get $\widetilde{F}$ on $Y \times I$.
Step1에서 각 $y \in Y$에 대해 $U_y \times I$상에서 $\widetilde{F}$를 정의했는데 이들이 겹치는 부분에서 일치함을 보이면 $Y \times I$에서 $\widetilde{F}$가 잘 정의됨을 알 수 있다.
즉, $z \in U_y \cap U'_y$에 대해 $\widetilde{F}|_{U_y \times I}(z,t) = \widetilde{F}|_{U'_y \times I}(z,t)$임을 보여야 한다.
이것은 U_y에서 보나 U'_y 에서 보나 $y \times I$의 lifting이고 같은 initial point를 가지고 있으므로 uniqueness of lifting에 의해 일치됨을 알 수 있다 . □

따름정리 5 *$\alpha \sim \beta \Rightarrow \widetilde{\alpha} \sim \widetilde{\beta}$.*
여기서 α, β는 X의 path들이고 $\widetilde{\alpha}$,$\widetilde{\beta}$는 같은 initial point를 가지는 lifting 들이다. 따라서 $\widetilde{\alpha}$와 $\widetilde{\beta}$는 같은 terminal point를 갖는다.

Some Consquences

1. $\pi_1(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$.

증명 Let $p: \mathbf{R} \to S^1$ be a covering map given by $p(x) = e^{2\pi i x}$.
If $[\alpha] \in \pi(S^1, 1)$, then α can be lifted uniquely to $\widetilde{\alpha}: I \to \mathbf{R}$ with $\widetilde{\alpha}(0) = 0$.
Define $\phi: \pi(S^1, 1) \to \mathbf{Z}$ by $[\alpha] \mapsto \widetilde{\alpha}(1)$. ϕ is well-defined by 따름정리 5.

이 ϕ가 isomorphism임을 보이기 위해 먼저 homomorphism임을 보이자.
$\phi([\alpha][\beta]) = \phi([\alpha * \beta]) = \widetilde{\alpha * \beta}(1)$이고 이것이 $\widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}(1)$임을 보이기 위해 τ를 다음과 같이 정의하자.
$\tau: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be a translation given by $\tau(x) = x + \widetilde{\alpha}(1)$.
이 때, $\widetilde{\alpha * \beta} = \widetilde{\alpha} * (\tau \circ \widetilde{\beta})$이 성립한다. 먼저 $\widetilde{\alpha} * (\tau \circ \widetilde{\beta})$는 잘 정의되었는지 즉 $\widetilde{\alpha}(1) = (\tau \circ \widetilde{\beta})(0)$ 인지 살펴보자. $\widetilde{\alpha}$와 $\widetilde{\beta}$는 둘 다 0에서 출발하는 path이고 τ는 $\widetilde{\alpha(1)}$만큼 translation 시켜주는 map이므로, $\widetilde{\beta}(0)$는 τ에 의해 $\widetilde{\alpha}(1)$으로 옮겨지고 $\widetilde{\alpha} * (\tau \circ \widetilde{\beta})$는 잘 정의된다.
다음으로 $\widetilde{\alpha} * (\tau \circ \widetilde{\beta})$ 가 $\alpha * \beta$의 lifting 임을 보이자.
$p \circ (\widetilde{\alpha} * (\tau \circ \widetilde{\beta})) = (p \circ \widetilde{\alpha}) * (p \circ (\tau \circ \widetilde{\beta})) = (p \circ \widetilde{\alpha}) * (p \circ \widetilde{\beta}) = \alpha * \beta$
따라서 $\widetilde{\alpha * \beta} = \widetilde{\alpha} * (\tau \circ \widetilde{\beta})$가 만족하고 다음이 성립한다.
$\widetilde{\alpha * \beta}(1) = \widetilde{\alpha} * (\tau \circ \widetilde{\beta})(1) = (\tau \circ \widetilde{\beta})(1) = \tau(\widetilde{\beta}(1)) = \widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}(1)$.

다음으로 ϕ 가 1-1 임을 보이자.
만일 $\phi([\alpha]) = 0$ 이라면 $\widetilde{\alpha}(1) = 0$ 이 되어 $\widetilde{\alpha}$ 는 0을 base point로 하는 loop가 된다. 즉 $[\widetilde{\alpha}] \in \pi_1(\mathbf{R}, 0) = 0$이므로
$0 = p_\sharp[\widetilde{\alpha}] = [p \circ \widetilde{\alpha}] = [\alpha] \in \pi(S^1, 1)$. 즉 $[\alpha] = 0$이다.

마지막으로 ϕ가 onto임을 보이기 위해 $\forall\, n \in \mathbf{Z}$에 대해 $\widetilde{\alpha}(t) = nt$, $\alpha = p \circ \widetilde{\alpha}$ 로 잡으면, $\phi([\alpha]) = \widetilde{\alpha}(1) = n$ 이 된다. 따라서 ϕ는 onto이다.

□

2. Let $\widetilde{X}$ be a path- connected space and $p: (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to (X, x_0)$ be a covering. Then $p_\sharp: \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to \pi_1(X, x_0)$ is injective.

증명 Clear from Covering homotopy property(따름정리 5) □

3.Let $\widetilde{X}$ be a path- connected space and $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to (X, x_0)$ be a covering. Then $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ and $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}')$ are conjugate in $\pi_1(X, x_0)$.

증명 $\widetilde{x_0}$와 $\widetilde{x_0}'$을 연결하는 path τ를 잡으면 다음 diagram 이 commute한다.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_o}) & \xrightarrow{\phi_\tau} & \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_o}') \\ \downarrow p_\sharp & & \downarrow p_\sharp \\ \pi_1(X, x_o) & \xrightarrow{conjugate\ by [p\cdot\tau]^{-1}} & \pi_1(X, x_o) \end{array}$$

□

정리 6 ***(General lifting theorem)***
Let $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to (X, x_0)$ be a covering and Y be a path-connected and locally path-connected space. Let $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$. Then
$\exists\ \widetilde{f} : (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ *, a lifting of f* $\Leftrightarrow$ $f_\sharp\pi_1(Y, y_0) \subset p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$.
In this case $\widetilde{f}$ is unique.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & & (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \\ & \exists\widetilde{f}\ \nearrow & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow[f]{} & (X, x_0) \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad f_\sharp\pi_1(Y, y_0) \subseteq p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})}$$

증명
($\Rightarrow$)
$f = p \circ \widetilde{f}$ 이므로 $f_\sharp = p_\sharp \circ \widetilde{f}_\sharp$ 이고 $f_\sharp\pi_1(Y, y_0) = p_\sharp(\widetilde{f}_\sharp\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$.

($\Leftarrow$)
임의의 $y \in Y$에 대해 $\widetilde{f}(y)$를 다음과 같이 정의하자. y_0와 y 사이의 path ρ 를 잡은 후 $f \circ \rho$의 $\widetilde{x_0}$에서 시작하는 lifting $\widetilde{f \circ \rho}$ 에 대해 $\widetilde{f}(y) = \widetilde{f \circ \rho}(1)$ 로 정의하면 이것이 바로 원하는 $\widetilde{f}$ 가 된다.
먼저 $\widetilde{f}$ 가 잘 정의되었는지를 보이자. 즉, y_0와 y사이의 path의 선택에 무관함을 보이기 위해, σ를 또다른 path로 두자. 그러면, $f \circ \rho * \overline{f \circ \sigma}$는 loop가 되고 가정에 의해 $[f \circ \rho * \overline{f \circ \sigma}] = f_\sharp[\rho * \overline{\sigma}] \in p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ 이다.
따라서 $f \circ \rho * \overline{f \circ \sigma}$의 lifting은 loop이고, $\widetilde{f \circ \sigma}(1) = \widetilde{f \circ \rho}(1)$ 이 되므로 $\widetilde{f}$는 잘 정의되었음을 알 수 있다.

다음으로 $\widetilde{f}$가 연속임을 보이자. $\widetilde{f}$가 연속임을 보이기 위해 $\forall y \in Y$ 에 대해 어떤 근방 W_y가 있어서 $\widetilde{f}|_{W_y}$가 연속이라는 것을 보이면 충분하다. $x = f(y)$에 대해 evenly cover되는 근방을 U_x라 두면 f가 연속이고 Y가 locally

path connected이므로 $f(W_y) \subset U_x$를 만족하는 path connected W_y가 존재한다. 그러면 $\forall z \in W_y$ 는 y로부터 W_y안에서 path τ_z로 연결할 수 있고, $\rho*\tau_z$는 y_0로부터 z까지의 path를 준다. 따라서 $\widetilde{f}(z) = f\circ\widetilde{(\rho*\tau_z)}(1) = \widetilde{f\circ\rho}*\widetilde{f\circ\tau_z}(1) = \widetilde{f\circ\tau_z}(1)$이 되고 이 때 $\widetilde{f\circ\tau_z}$는 $\widetilde{f}(y)$ 에서 시작하는 lifting이다. 즉 W_y안의 임의의 점 z를 y_0와의 path의 끝점으로 보고 이 path에서 y와 z를 잇는 부분을 f로 보낸 것은 U_x에 들어감을 이용해서 U_x에서의 V_a와의 homeomorphsim p^{-1}를 쓰자.
$p^{-1}(U_x) = \coprod_{a\in A} V_a$ and $\widetilde{f}(y) \in V_a$ 이라고 두면 V_a에서 p^{-1}는 homeomorphism이므로 τ_z를 이용해서 $\widetilde{f}|_{W_y} = p|_{V_a}^{-1} \circ f|_{W_y}$ 임을 알 수 있고, 또 $\widetilde{f}$는 path의 선택에 무관하다는 사실로부터 그렇게 될 수 밖에 없다. 따라서 $\widetilde{f}|_{W_y}$ 는 연속이다.
마지막으로 uniqueness 는 Y가 connected이므로 정리 1에 의해 증명된다. $\square$

Remark. This is a generalization of *Unique path lifting property* and *Covering homotopy property.*

참고로 *Unique path lifting property*는 Y가 I인 경우이고, $Y \times I$인 경우가 *Covering homotopy property*이다.

Review of locally (path-) connected space.

1. $\forall x \in X$ has a (path-) connected neighborhood. $\Rightarrow$(path-) component is open (and hence closed).

증명 clear $\square$

2. X : path-connected $\Leftrightarrow$ X : connected and $\forall x \in X$ has a path-connected neighborhood.

증명 ($\Rightarrow$)clear

($\Leftarrow$)1.에서 path component는 open and closed이므로 전공간이 된다. $\square$

3. X : locally path connected $\Rightarrow$ path-component = component

증명 일반적으로는 $\subset$이 성립하는데 component는 connected이므로 2에 의해 $=$이 성립한다. $\square$

정리 7 *X is locally (path-) connected and p:$\widetilde{X} \to X$ is a covering.*
If $\widetilde{C}$ is a (path-) component of $\widetilde{X}$, then
(i) $p(\widetilde{C})$ is a (path-) component of X.
(ii) $p|_{\widetilde{C}} : \widetilde{C} \to p(\widetilde{C})$ is a covering.

증명 HW $\sharp$ 5 $\square$

따라서 covering space theory에서 path-connected인 경우로 제한하여도 상관없다. 또한 fundamental group을 동시에 고려하기 위해서는 path-connected일 필요가 있다.
더욱이 general lifting therorem은 covering space theory에서 가장 중요한 정리이고 이를 자유롭게 사용하기 위해서 covering space theory에서 나오는 공간들에 대해 보통 path-connectedness, locally path-connectedness를 가정한다.