IV.3 Some basic properties of π_n.

정리 1 $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$

증명 Exactly same as π_1-case. □

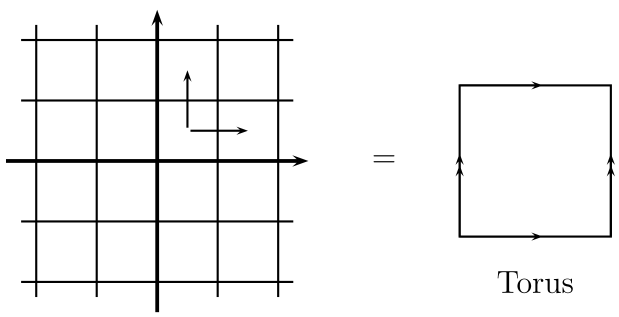
정리 2 *Let* $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *be a covering space. Then* $p_* : \pi_n(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_n(X, x_0)$ *is an isomorphism for* $n \geq 2$.

증명 (1) p_* is one to one :
$p_*[\alpha] = 0$이라면 $p \circ \alpha \sim x_0$이므로, covering homotopy property에 의하여 $\alpha \sim \widetilde{x}_0$이 되어 $[\alpha] = 0$이다. (Lifting property section의 따름정리 5 참조) 따라서 p_*는 one to one이다.
(2) p_* is onto :
임의의 $\alpha : (S^n, e_1) \to (X, x_0)$에 대하여 $\pi_1(S^n) = 0$이므로 $(n \geq 2)$, general lifting theorem의 가정을 만족한다. 따라서, α의 lifting $\widetilde{\alpha} : (S^n, e_1) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$가 존재한다. 이때, $p_*[\widetilde{\alpha}] = [\alpha]$이므로, p_*는 onto이다. □

Examples.
1. $\pi_n(S^1) = \pi_n(\mathbb{R}) = 0$.
$\mathbb{R}$은 contranctible space이므로 $\pi_n(\mathbb{R}) = 0$이고, $\mathbb{R}$는 S^1의 universal covering space이므로 위의 정리에 의하여 자명하다.

2. $\pi_n(T^2) = \pi_n(S^1 \times S^1) = \pi_n(S^1) \times \pi_n(S^1) = 0$.

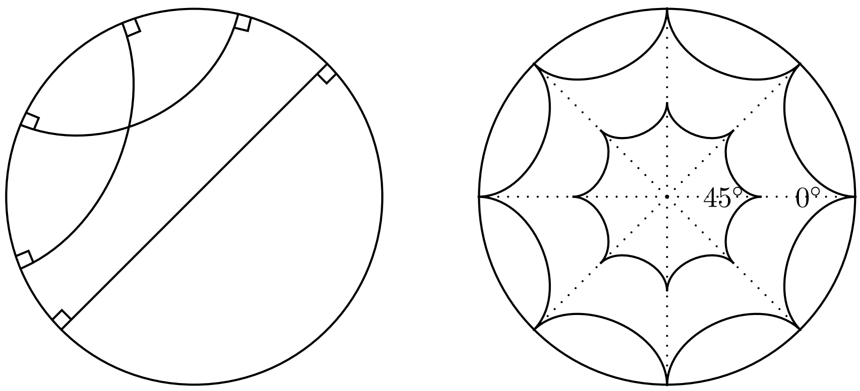
3. π_n(Closed surface with genus $g \geq 1$) $= \pi_n(\triangle) = 0$ ($\triangle$ =Open unit disk).
2.에서 살펴본 Torus의 경우는 다음과 같은 방법으로도 생각할 수 있다. Torus는 4각형의 마주보는 변을 서로 identify한 것으로 나타낼 수 있는데 이 identification들은 각각 가로, 세로 평행 이동에 의해 realize되고, 이 사각형을 평행이동하면 평면전체를 tile처럼 덮을 수 있는 소위 "tessellation"을 주게 되어, $\mathbb{R}^2$는 이 평행이동들을 deck transformation group으로 가지는 Torus의 covering space가 된다.



Torus

따라서, $\pi_n(T^2) = \pi_n(\mathbb{R}^2) = 0$임을 다시 확인할 수 있다.
일반적으로 genus가 g인 surface는 $4g$각형으로 나타낼 수 있는데, $g > 1$인 경우에는 꼭지각이 $\frac{2\pi}{4g}$가 아니므로 이 $4g$각형을 평행이동하여 평면의 tessellation을 줄 수 없다. 따라서, 다음과 같은 Poincaré disk에서 생각한다.

Poincaré disk



Poincaré disk는 평면상의 open disk에 왼쪽 그림과 같이 원과 직각으로 만나는 원호(또는 중심을 통과하는 직선)가 측지선이 되도록 metric을 준 것이다.
즉, 8각형($g = 2$)의 경우를 예로 들면 오른쪽 그림과 같은 곡선이 Poincaré disk에서의 8각형이 된다.
이 때, 바깥쪽 8각형에서 꼭지각은 $0°$이고, 안쪽으로 접근할수록 측지선이 평면상의 직선에 가까워지므로 꼭지각이 평면에서와 같은 $135°$에 수렴한다. 따라서 그림과 같이 중간에 꼭지각의 크기가 $45°$가 되는 8각형을 잡을 수 있다.
이 8각형을 "평행이동"하면 8개의 꼭지점이 모두 한점에 모이므로 Poincaré disk에 tessellation을 줄 수 있다.
같은 방법으로 다른 $4g$각형에 대해서도 모두 평행이동을 통하여 Poincaré disk에 tessellation을 줄 수 있으므로, Poincaré disk는 genus g인 surface의 covering space가 된다.
그런데, Poincaré disk 역시 contractible space이므로

$$\pi_n(\text{Closed surface with genus } g \geq 1) = \pi_n(\triangle) = 0$$

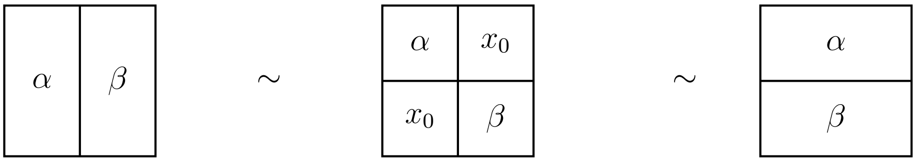
를 얻는다.
이와 같이 $\pi_1(X) = \Pi$, $\pi_n(X) = 0, n \geq 2$가 되는 space를 $K(\Pi, 1)$-space라고 부른다.

정리 3 *If $n \geq 2$, then $\pi_n(X, x_0)$ is abelian.*

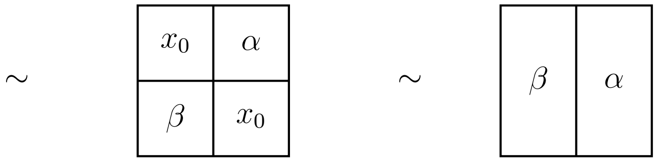
증명 Define

$$\alpha \circ \beta(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \begin{cases} \alpha(t_1, 2t_2, \cdots, t_n) & \text{if } 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(t_1, 2t_2 - 1, \cdots, t_n) & \text{if } \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \end{cases}$$

즉, $\alpha * \beta$는 첫번째 변수에 대하여 붙인 것인데 $\alpha \circ \beta$는 두번째 변수에 대하여 붙인 것이다. 정의로 부터 다음을 바로 알수 있다. (그림에서 가로축은 I_1, 세로축은 I_2을 나타내며 $I_3, \cdots, I_n$은 생략되어 있다.)



$$\alpha * \beta \quad \sim \quad (x_0 \circ \alpha) * (\beta \circ x_0) = (x_0 * \beta) \circ (\alpha * x_0) \quad \sim \quad \beta \circ \alpha$$



$$\sim \quad (\beta * x_0) \circ (x_0 * \alpha) = (\beta \circ x_0) * (x_0 \circ \alpha) \sim \quad \beta * \alpha$$

따라서, $\pi_n(X, x_0)$은 abelian이다. □

Ω-version

위 정리를 loop space Ω를 이용하여 증명해 보자.

정의 1 (X, μ, x_0) is an H-space if

(1) $\mu : X \times X \to X$ is continuous. Write $\mu(x, y) = xy$.

(2)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{(id,x_0)}"] \arrow[dr, "id"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] & X \arrow[l, "{(x_0,id)}"'] \arrow[dl, "id"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
commute up to homotopy relative to x_0

즉, 위의 (2)는 다음과 동치이다.
$L_{x_0} : X \to X$ defined by $L_{x_0}(x) = x_0 x$ is homotopic to id (rel x_0) and
$R_{x_0} : X \to X$ defined by $R_{x_0}(x) = x x_0$ is homotopic to id (rel x_0).
H-space의 예로는 Topological group, loop space Ω등이 있다.

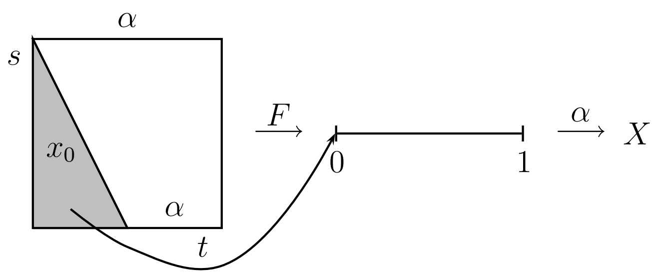
정리 4 *Ω is an H-space.*

증명 (1) Define $\mu : \Omega \times \Omega \to \Omega$ by $\mu(\alpha, \beta) = \alpha * \beta$

숙제 13.(1) Show $\begin{array}{ll} (X,x)^{(I,1)} \times (X,x)^{(I,0)} & \to X^I \\ (\alpha,\ \beta) & \mapsto \alpha\beta \end{array}$ is continuous.

(**숙제 13.(2)**는 아래에)

(2) Show $L_{x_0} \simeq id$ (rel x_0) : (Similarly for R_{x_0})
$H : \Omega \times I \to \Omega$를 다음과 같이 정의한다.
$H(\alpha, s) = \alpha_s$, $\alpha_s(t) := \alpha \circ F(s,t)$ where



즉, F는 각 s-level에서 빗금친 부분을 0으로 나머지 부분을 linear하게 I로 보내주는 함수이고, 따라서 α_s는 $0 \le t \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s$일때 x_0에 머물러있다가 α를 가는 curve가 된다.
이 때, H가 L_{x_0}와 id 사이의 homotopy임을 보이자.
먼저 $H_0 = L_{x_0}$,$H_1 = id$임은 자명하다.
$G : \Omega \times I_s \times I_t \to X$를 $G(\alpha, s, t) = \alpha(F(s,t))$로 잡으면 $\widehat{G} = H$이므로, H가 연속임을 보이기 위하서는 G가 연속임을 보이면 충분하다. 그런데, G는

$$\begin{array}{c} G : \Omega \times I_s \times I_t \xrightarrow{id \times F} \Omega \times I \xrightarrow{evaluation} X \\ (\alpha, s, t) \longmapsto (\alpha, F(s,t)) \longmapsto \alpha(F(s,t)) \end{array}$$

와 같이 연속함수들의 합성이므로 연속이다. 따라서 $L_{x_0} \simeq id$. □

정리 5 *Suppose (X, e) is an H-space. Then $\pi_1(X, e)$ is abelian.*

증명 숙제 13.(2) (Hint. Almost same as the case of topological group.) □

이제 위의 두 정리로부터 다음의 따름정리를 얻는다.

따름정리 6 *If $n \ge 2$, $\pi_n(X, x_0)$ is abelian.*