V.2 Abstract Simplicial complex

정의 1 *An (abstract) simplicial complex* consists of a set V of vertices and a collection K of finite non-empty subsets of V called simplices such that
1 . $v \in V \Rightarrow \{v\} \in K$,
2 . $\sigma \in K$, $\emptyset \neq \tau \subset \sigma \;\Rightarrow\; \tau \in K$.(이 때 τ를 σ의 face라고 하고, $\tau < \sigma$로 쓴다.)

앞에서 정의했던 것과 마찬가지로 dimension, subcomplex, p-skeleton을 정의하자.
$dim\, K := sup\{dim\, \sigma \,|\, \sigma \in K\}$.
$L \subset K$ is a *subcomplex*$(L < K)$ if L is a simplicial complex in its own right.
$K^p = p - skeleton$ of K= collection of all simplices of K of dim$\leq\ p$
이때 K^p는 K의 subcomplex가 된다.

Examples.
1 . 임의의 주어진 집합 A에 대해 $\mathcal{F}(A)$를 A의 모든 유한부분집합(공집합 제외)들의 집합이라고 두자. 그러면 $K = \mathcal{F}(A)$는 $V = A$로 하는 simplicial complex가 된다.

2 . 주어진 집합 X의 subset들의 collection $\mathcal{U}$에 대해, the *nerve* of $\mathcal{U}$, $K(\mathcal{U})$를 다음과 같이 정의하자. $K(\mathcal{U})$의 simplex들을 non-empty intersection을 가지는 $\mathcal{U}$의 finite non-empty subsets라 하자. 그러면 $K(\mathcal{U})$는 simplicial complex가 된다.

3 . K, L이 simplicial complex 일 때 K와 L의 join$K * L$을 다음과 같이 정의하자.
$K * L = K \coprod L \coprod \{\sigma \coprod \tau \mid \sigma \in K, \tau \in L\}$.
이것 역시 simplicial complex가 된다. 예를 들어 두 1-dim simplex K, L 을 join하면 3차원짜리 사면체가 나오게 되고, $K = \{point\}$ 인 경우 2차원 삼각형 L과 join하면 속이 찬 사면체가 나오게 된다. (K가 한 점일 때 K와 L의 join을 L상의 cone이라고 한다.)

$\sigma^n * \sigma^m = \sigma^{n+m+1}$
($\because \sigma^n$과 σ^m의 vertices를 각각 $\{a_1, \cdots, a_{n+1}\}, \{b_1, \cdots, b_{m+1}\}$이라 두면
$\sigma^n * \sigma^m$의 vertices는 $\{a_1, \cdots, a_{n+1}, b_1, \cdots, b_{m+1}\}$이 된다 . 그리고 이때 simplicial complex structure는 power set이 된다.)

Check $S^n * S^m = S^{n+m+1}$.

이제 abstract simplicial complex의 underlying space를 정의하자.

K를 simplicial complex, $\sigma = \{v_0, \cdots, v_n\} \in K$라고 하자. 이 때, 다음과 같이 $|K|$를 정의한다.
Let $|\sigma| = \{\sum_{i=0}^{n} t_i v_i \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_i \geq 0\}$ and, $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|$
with obvious identification $1 \cdot v = v$ and $0 \cdot v = 0$.
이를 formal하게 쓰면,
$|K| = \{x : V \to [0,1] \mid \{v \in K \mid x(v) \neq 0\} \in K, \sum_{v \in K} x(v) = 1\}$ and
$|\sigma| = \{x \in |K| \mid x(v) = 0\ if\ v \notin \sigma\}$.
$x(v) = t_v(x)$로 정의된 $t_v : |K| \to [0,1]$ 를 x의 v번째 barycentric coordinate이라고 한다. 만일 모든 v에 대해 $t_v(x) = t_v(y)$ 이면 $x = y$ 이다.

이제 $|K|$에 topology를 주자.
topology of $|\sigma|$: $x, y \in \sigma$, $x = \sum t_i v_i$, $y = \sum s_i v_i$ 에 대해
$d(x,y) := \sqrt{\sum (t_i - s_i)^2}$ 로 주면
$|\sigma| \cong$ $standard\ simplex < e_0, \cdots, e_n > \subset \mathbb{R}^{n+1}$.(isometric 하다.)
$\cong$ $any\ affine\ simplex\ < a_0, \cdots, a_n > \subset \mathbb{R}^N$ with the subspace topology.
(이 affine simplex $< a_0, \cdots, a_n >$를 a geometric realization of $|\sigma|$라고 한다.)
topology of $|K|$를 weak topology generated by $\{|\sigma| \mid \sigma \in K\}$로 정의한다.
Note that $|\sigma| \cap |\tau|$ is clearly closed in $|\sigma|$ and in $|\tau|$.

정리 1 *$f : |K| \to X$ is continuous $\Leftrightarrow$ $f|_{|\sigma|}$ is continuous $\forall\ |\sigma| \in K$.*

증명 $\Rightarrow$ 는 당연하고 $\Leftarrow$ 를 보이자.
X에서 closed인 C에 대해 $f^{-1}(C)$가 closed in $|K|$임을 보이면 된다. 그런데 임의의 $|\sigma|$에 대해 $f^{-1}(C) \cap |\sigma| = f|_{|\sigma|}^{-1}(C)$ 이고 이는 $|\sigma|$ 에서 closed 이므로 따라서 $f^{-1}(C)$는 $|K|$에서 closed이다. □

따름정리 2
(1) $t_v : |K| \to [0,1]$ is continuous.
(2) $|K|$ is a Hausdorff space.
(3) $A \subset |K|$ is compact $\Leftrightarrow$ A is closed subset of $|L|$ for some finite subcomplex L of K. In particular, $|K|$ is compact if and only if K is a finite simplicial complex.

증명 (1)은 각 simplex 상에서 coordinate function t_v는 연속이므로 따라서 $|K|$에서도 연속이다.

(2)는 만일 $x \neq y$ in $|K|$ 이라면 $t_v(x) \neq t_v(y)$ 를 만족하는 v가 존재하므로 따라서 (1)에 의해 x, y를 separate 시킬 수 있다.
(3)에서 $\Leftarrow$를 보이자. $|L| = \bigcup_{\sigma \in L} \sigma$이고 각 σ는 compact이다. L 이 finite 이면 $|L|$은 compact set들의 finite union이므로 $|L|$ 역시 compact 이다. 따라서 L의 closed subset A 역시 compact이다.
$\Rightarrow$를 보이기 위해 compact인 $A \subset |K|$ 와 $\forall \sigma \in K$ 에 대해 $A \cap \mathring{\sigma}$ 를 생각하자. $A \cap \mathring{\sigma}$가 non-empty인 σ마다 $A \cap \mathring{\sigma}$ 에 속하는 원소를 하나씩 뽑아 x_σ라 두고 이들을 모은 것을 A'라 두자. 이 때 $|K| = \coprod_{\sigma \in K} \mathring{\sigma}$이므로 A'이 finite임을 보이면 충분하다. $A' \subset A$ 이고 A'의 모든 subset B는 closed가 되므로 ($B \cap \sigma$가 finite set이므로 σ의 closed subset이 되고 weak topology의 정의에 의해 B는 closed이다.) A'는 discrete하다. 또한 A'은 compact한 A의 closed subset이므로 A'역시 compact이다. 즉 A'는 compact, discrete set이므로 finite set이 되어야 한다.

□

Simplicial map

$f : K \to L$를 simplicial map 이라고 두자. 즉 $f : V(K) \to V(L)$, $f(\sigma) \in L$ if $\sigma \in K$. 이때 다음과 같은 map을 생각하자.
$"f" : |K| \to |L|$ defined as : $\sum_{i=0}^{n} t_i v_i = x \in |K| \Rightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)$
즉 $"f"(|\sigma|) = |f(\sigma)|$ 이다. 이 $"f"$를 f에 의해 induced된 simplicial map이라고 한다.
ex. simplicial map $\circ$ simplicial map = simplicial map.

0 . $"f"$ is continuous. ($"f"|_{|\sigma|}$가 continuous이므로)

1 . $f : K \to L$ 가 simplicial isomorphism 이면 $"f" : |K| \to |L|$ is a homeomorphism 이고, 이를 simplicial homeomorphism이라고 부른다.

2 . K 가 finite simplicial complex 이면 $|K|$는 $\mathbf{R}^N$에 embed된다.
증명 K가 finite이므로 $V(K) = \{v_0, \cdots v_N\}$ 라고 놓고, $\mathbb{R}^N$ 안에서 geometrically independent하게 $a_0, \cdots, a_N$를 잡는다. 그리고 $< a_0, \cdots, a_N >= \sigma^N$으로 놓고 이 σ^N과 그것의 face 들로 이루어진 simplicial complex 를 $\triangle^N$ 라 놓자. 이 때 K와 $\triangle^N$사이에 다음과 같은 함수를 생각하자.
Define $f : K \to \triangle^N$ by $f(v_i) = a_i, \quad i = 0, \cdots, N$.
그러면 $\{v_0, \cdots, v_N\}$의 subset들의 image들은 $\{a_0, \cdots, a_N\}$들의 subset들이 되는데 이들은 모두 $\triangle^N$상에서 simplex 가 되므로 f는 simplicial map이 된다.

따라서 f는 K와 $\triangle^N$의 subcomplex $L = f(K)$사이의 isomorphism을 주므로
"f" : $|K| \to |L|_w$ 는 homeomorphism 이 된다.
이 때 L은 finite 하므로 $\mathbf{R}^n$에서 $|L|_s = |L|_w$ 이고 따라서
"f" : $|K| \to |L|_s \subseteq \mathbf{R}^n$ 가 homeomorphism이 되어 $|K|$는 $\mathbf{R}^n$에 embed 된다.
□

숙제 14. 다음을 보여라.
K is locally finite.
(i.e., each vertex belongs to only finitely many simplices in K.)
$\Leftrightarrow$ $|K|$ is locally compact.
$\Leftrightarrow$ $|K|$ is metrizable with respect to d, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{v\in V}(t_v(x) - t_v(y))^2}$.

숙제 15. If K is countable and locally finite and $dim\, K \leq n$, then $|K|$ can be embedded as a closed subset in $\mathbf{R}^{2n+1}$.
(*Hint.*) Use a curve $C = (t, t^2, \cdots, t^{2n+1})$.
이 C위의 어떤 2n+2개의 점을 뽑아도 이들은 geometrically independent하다.

정의 2 *star(v)*
$v \in V(K)$에 대해 $st(v) := \bigcup_{v\in\sigma} int(|\sigma|) = \{x \in |K| \mid t_v(x) \neq 0\}$.

이 때, $\overline{st(v)} = \bigcup_{v\in\sigma} |\sigma|$ 임을 보이자.
$(\subseteq)$ $st(v) = \bigcup int(|\sigma|) \subseteq \bigcup |\sigma|$ 이고, $\bigcup |\sigma|$은 closed이므로 $\overline{st(v)} \subseteq \bigcup_{v\in\sigma} |\sigma|$이다.
$(\supseteq)$ $v \in \sigma$인 각 σ들은 $\sigma \in \overline{st(v)}$ 이므로 $\bigcup_{v\in\sigma} |\sigma| \subseteq \overline{st(v)}$ 이다.
따라서 $\overline{st(v)}$는 $|K|$에서 closed이고, $lk(v) := \overline{sk(v)} - st(v)$ 로 정의한다.