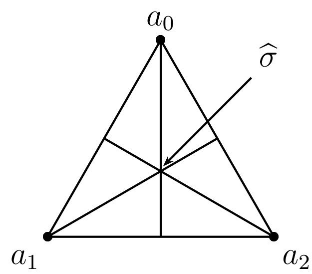
# V.3 Simplicial approximation theorem

**Barycentric subdivision**

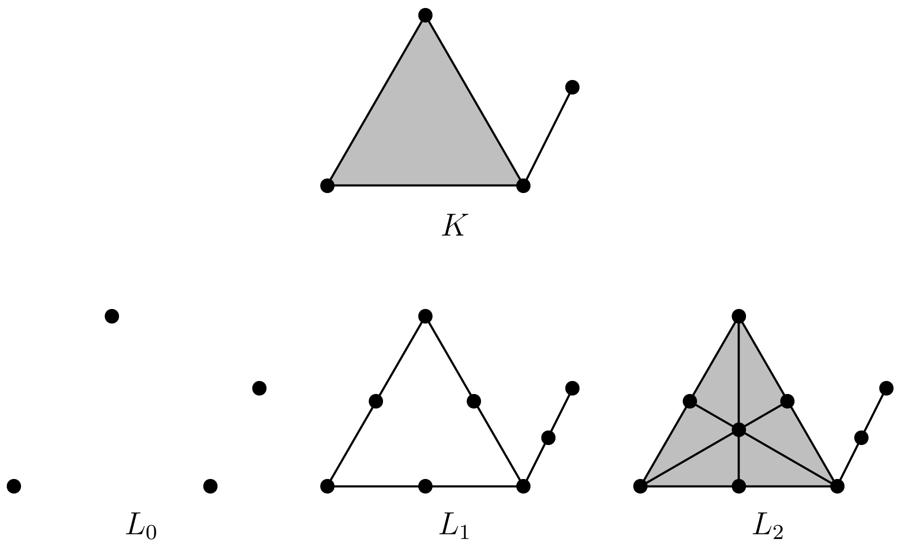
Given $\sigma =< a_0, \cdots, a_n >\subset \mathbb{R}^N$, the ***barycenter*** $\widehat{\sigma}$ of $\sigma$ is defined by

$$\widehat{\sigma} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} a_i.$$




**정의 1** Let $K$ be a simplicial complex in $\mathbb{R}^N$, the ***baricentric subdivision*** of $K$, denoted by $sdK$, is defined inductively as follows

1. $L_0 := V(K)$.
2. Given $L_p$, $L_{p+1}$ is the simplicial complex determined by $\bigcup_{\sigma\in K^{p+1}} \{\widehat{\sigma} * \partial\sigma\}$
   where $\partial\sigma$ is viewed as a subcomplex of $L_p$.
3. $sdK = \bigcup L_p$.




**Note.** Abstractly,

1. $V(sdK) = \bigcup_{\sigma\in K} \{\widehat{\sigma}\}$
2. $sdK = \{< \widehat{\sigma}_1, \cdots, \widehat{\sigma}_p > \mid \sigma_1 < \cdots < \sigma_p, p = 1, 2, \cdots, \sigma_i \in K\}$,
   where $<$ denotes proper face.
3. $|sdK| = |K|$ as a topological space.

**정의 2** $K$ : a finite simplicial complex in $\mathbb{R}^N$.
$mesh(K) = max\{diam(\sigma) \mid \sigma \in K\}$.

**정리 1**
*(1) $\sigma$ : n-simplex in $\mathbb{R}^N \Rightarrow mesh(sd\sigma) \leq \frac{n}{n+1} mesh(\sigma)$.*
*(2) K : n-dimensional finite simplicial complex in $\mathbb{R}^N$*
*$\Rightarrow mesh(sdK) \leq \frac{n}{n+1} mesh(K)$*

**증명** (2)는 (1)의 내용과 $\frac{x}{x+1}$이 증가함수라는 사실로부터 바로 나오므로, (1)을 증명하자. 이를 증명하기에 앞서 다음 Note를 살펴보자.
**Note.** 1. $\forall$ $\sigma$, $\exists$ an edge $e < \sigma$, such that $diam(\sigma) = length(e)$.
2.$\forall$ $x \in \sigma$, $|\hat{\sigma} - x| \leq |\hat{\sigma} - v|$ for some vertex $v$ of $\sigma$, and

$$|\hat{\sigma} - v_0| = |v_0 - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i| = |\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(v_i - v_0)| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}|v_i - v_0|$$
$$\leq \frac{n}{n+1} max|v_i - v_0| \leq \frac{n}{n+1} mesh(\sigma)$$

이제 (1)의 증명을 하자. $\forall \tau \in sd(\sigma)$에 대해 $\tau$의 모든 edge $e$는 barycenter에서 혹은 face의 barycenter에서 나가므로 Note 2에 의해 $length(e) \leq \frac{n}{n+1} mesh(\sigma)$이다. 따라서 Note 1에 의해 $mesh(\tau) \leq \frac{n}{n+1} mesh(\sigma)$ 이다. □

**따름정리 2** *$mesh(sd^N K) \leq C(\frac{n}{n+1})^N$ and converge to 0 as $N \to \infty$.*

**Note.** $g : K \to L$, a simplicial map
$\Rightarrow g(st(v)) \subset st(g(v))$, $\forall v \in V(K)$.
**증명** $x \in st(v) \Leftrightarrow t_v(x) > 0$.
$g$가 simplicial map이므로 $t_{g(v)}(g(x)) \geq t_v(x)$이고 따라서 $x \in st(v)$이면 $t_{g(v)}(g(x)) > 0$이고 $g(x) \in st(g(v))$. □

**명제 3** *Let $f : |K| \to |L|$ be a map and $g : |K| \to |L|$ be a simplicial map. Then the followings are equivalent.*
*(1) $\forall x \in |K|$, $f(x) \in \mathring{\tau} \Rightarrow g(x) \in \tau$.*
*(2) $\forall x \in |K|$, $f(x) \in \tau \Rightarrow g(x) \in \tau$.*
*(3) $v \in V(K), f(st(v)) \subset st(g(v))$.*

**정의 3** Such simplicial map $g$ is called a ***Simplicial approximation*** of $f$.

**증명** (2)$\Rightarrow$(1)은 당연하다.
(1)$\Rightarrow$(3) $x \in st(v)$,$f(x) \in \mathring{\tau}$ 라 놓자. 가정으로부터 $t_v(x) > 0$, $g(x) \in \tau$이다.

이때, $t_{g(v)}(g(x)) \geq t_v(x) > 0$이므로, $g(x) \in st(g(v))$이다. 그런데 $g(x) \in \tau$임을 알고 있으므로, $g(v)$는 $\tau$의 vertex이고, $\overset{\circ}{\tau} \subset st(g(v))$이다. 따라서 $f(x) \in \overset{\circ}{\tau} \subset st(g(v))$.
(3)⇒(2) $x \in \overset{\circ}{\sigma}$ 이고, $f(x) \in \tau$라고 가정하자. 이 때, 임의의 $v \in V(\sigma)$ 에 대해 $x \in st(v)$이다. $f(st(v)) \subset st(g(v))$로부터 $f(x) \in st(g(v))$ 이고 따라서 $g(v)$는 $\tau$의 vertex가 된다. 임의의 $v \in V(\sigma)$에 대하여 성립하므로, $g(\sigma) \subset \tau$ 이고 $g(x) \in \tau$이다. □

**정리 4** *Let $f : |K| \to |L|$ be a map which satisfies "star condition", i.e.,*
*$\forall\ v \in V(K),\ \exists\ w \in V(L)$ such that $f(st(v)) \subset st(w)$.*
*Then there exists $g : K \to L$ which is a simplicial approximation of $f$.*

**증명** 모든 $v \in V(K)$에 대해 $f(st(v)) \subset st(w)$를 만족하는 아무런 $w$ 를 선택하여 $g(v) = w$로 정의하자.
이제 이 $g$가 simplicial map임을 보이기 위해 $< v_0, \cdots, v_k >$가 simplex이면, $< g(v_0), \cdots, g(v_k) >$가 simplex임을 보이자. simplex $\sigma =< v_0, \cdots, v_k >$로 놓으면 $x \in \overset{\circ}{\sigma}$가 존재하고, $x \in \bigcap_{i=0}^{k} st(v_i)$이다.
이 때, $f(x) \in f(\bigcap st(v_i)) \subset \bigcap f(st(v_i)) \subset \bigcap st(w_i)$, $w_i = g(v_i)$이 되어 모든 $i$에 대해 $t_{w_i}(f(x)) > 0$이다. 따라서 $< w_0, \cdots, w_k >=< g(v_0), \cdots, g(v_k)) >$는 simplex를 형성한다.(interior point $f(x)$가 존재하므로). 따라서 $g$는 simplicial map이 되고 $f(st(v)) \subset st(g(v))$ 를 만족하므로 앞의 명제 3의 (3)을 만족하여 $g$는 $f$의 simplicial approximation이 된다. □

**Remark.** $f : |K| \to |L|$가 $K$의 subcomplex $M$에서 이미 simplicial map이라고 하자. 그러면 위 정리의 증명과정에서 $g$를 잡을 때, $M$에서의 값은 그대로 주고 (앞 Note에서 simplicial map은 star condition을 만족하므로 ) 나머지 부분만 정리의 증명처럼 하면 되므로 $g|_{|M|} = f|_{|M|}$이 되도록 approximation $g$를 잡을 수 있다.

**정리 5 (Simplicial approximation theorem)**
*$K, L$ : finite simplicial complexes in $\mathbb{R}^N$.*
*(1) Given a map $f : |K| \to |L|$, $\exists N > 0$ such that $f$ has a simplicial approximation $g : sd^N K \to L$.*
*(2) If $g$ is a simplicial approximation of $f$, $f \simeq g$.*

**증명** (1) $\mathcal{U} = \{f^{-1}(st(w)) \mid w \in V(L)\}$은 $|K|$의 open covering이 된다. $K$가 finite이므로 $|K|$는 compact이고 따라서 open covering $\mathcal{U}$에 대해 Lebesgue number $\epsilon$이 존재한다. 이 때, $mesh(sd^N K) < \frac{\epsilon}{2}$ 를 만족하도록 $N$을 충분히 크

게 잡으면 $sd^N K$ 안의 각 star들은 diam이 $\epsilon$보다 작고 따라서 어떤 $U \in \mathcal{U}$에 포함된다. 그러면 $f : |sd^N K| \to |L|$은 star condition을 만족하고 $|sd^N K| = |K|$이므로 정리 4에 의해 simplicial approximation $g$가 존재한다.
(2) $f$와 $g$사이의 homotopy를 $F : |K| \times I \to |L|$, $F(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x)$로 정의한다. 먼저 명제 3에 의해 각 $f(x)$와 $g(x)$는 같은 simplex 안에 있으므로 $F$는 잘 정의된다. 또한 각 simplex $\sigma$에서 $f$와 $g$는 연속이므로 $F$는 $|\sigma| \times I$에서 연속이다. $K$가 finite이므로 $F$는 연속이다. 따라서 $F$는 원하는 homotopy이다.
$\square$

**Remark.**
1. Theorem 5 holds for arbitrary simplicial complexes $K$ and $L$, and for a suitable subdivision (satisfying mesh condition in the proof) $K'$ of $K$.
(Reference: Munkres, 16.5, 19.4, 20.5)
2. In general, The topology of $|K| \times I$ is coherent with the subspaces $\{|\sigma| \times I \mid \sigma \in K\}$. (see Munkres, Elements of algebraic topology.) (**숙제 16.**)