VI Simplicial Homology

정의 1 (1) An ***ordered simplex*** is a simplex σ together with a particular order of vertices of σ and will be denoted by $\sigma = (v_0, \cdots, v_p)$.
(2) An ***orientation*** of a simplex $\sigma = (v_0, \cdots, v_p)$: Two orderings of vertices of σ are equivalent if they differ by an even permutation. A choice of an equivalence class is called an orientation of σ.
(3) An ***oriented simplex*** is a simplex σ together with an orientation of σ and will be denoted by $[v_0, \cdots, v_p]$ representing the equivalence class of $(v_0, \cdots, v_p)$ as an orientation of σ.

예를 들면, 2-simplex의 경우 $[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2, v_0]$이다.

그림으로 보면 다음과 같이 각 simplex에 두가지 orientation이 존재한다.

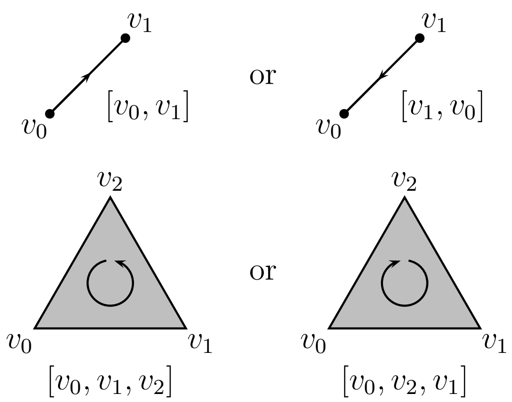


그림 1: Orientations

Notation σ : an oriented simplex $\Rightarrow$ $\overline{\sigma}$: an oriented simplex with opposite orientation.

정의 2 (p-th chain group) K : a simplicial complex
$C_p(K)$= the abelian group generated by the oriented p-simplices with the relation $\overline{\sigma} = -\sigma$.

즉, $C_p(K)$는 K의 p-simplex들로 generate된 free abelian group임을 알 수 있다. 일반적으로 $p \leq 0$인 경우에는 $C_p(K) = 0$으로 정의한다. 또한, $C_p(K)$의 원소를 p-chain이라고 부르고 $\sum_{i=1}^{k} n_i \sigma_i,\ n_i \in \mathbb{Z}$로 유일하게 표현된다.

다음은 free abelian group의 universal property로부터 명백하다.

Note. A function f from the oriented p-simplices of K to an abelian group G extends to a homomorphism : $C_p(K) \to G$ uniquely if $f(\overline{\sigma}) = -f(\sigma)$ for all oriented σ.

Boundary operation

$\partial_p : C_p(K) \to C_{p-1}(K)$, boundary operator is defined as follows.

$$\sigma = [v_0, \cdots, v_p] \Rightarrow \partial_p \sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [v_0, \cdots, \widehat{v}_i, \cdots, v_p]$$

∂_p가 orientation을 정의하는 equivalence class에 대하여 well-defined임을 확인하기 위해서는 $\partial_p \sigma$가 well-defined이고
$\partial_p(\overline{\sigma}) = -\partial_p \sigma$임을 보이면 되는데, 이는 transposition에 대하여 부호가 반대가 됨을 보이면 충분하다.
즉,$\partial[v_0, \cdots, v_j, v_{j+1}, \cdots, v_p] = -\partial[v_0, \cdots, v_{j+1}, v_j, \cdots, v_p]$임을 확인하면 된다. 그런데 이는 ∂의 정의에 따라서 자명하므로, ∂_p는 well-defined homomorphism이 된다.

보조정리 1 $\partial_{p-1}\partial_p = 0$ *(*$\partial^2 = 0$*)*

증명
$$\begin{aligned}
\partial_{p-1}\partial_p[v_0, \cdots, v_p] &= \partial_{p-1} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [v_0, \cdots, \widehat{v}_i, \cdots, v_p] \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \partial_{p-1} [v_0, \cdots, \widehat{v}_i, \cdots, v_p] \\
&= \sum_{j<i}^{k} (-1)^i (-1)^j [v_0, \cdots, \widehat{v}_j, \cdots, \widehat{v}_i, \cdots, v_p] \\
&\quad + \sum_{i<j}^{k} (-1)^i (-1)^{j-1} [v_0, \cdots, \widehat{v}_i, \cdots, \widehat{v}_j, \cdots, v_p] \\
&= 0
\end{aligned}$$
□

Remark
For convenience, we can add more generators and relations to $C_p(K)$.
If $v_0, \cdots, v_p$ are vertices not necessarily distinct of some simplex, we define

$$[v_0, \cdots, v_p] = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{if not distinct.} \\ \text{as before} & \text{if distinct} \end{array} \right. .$$

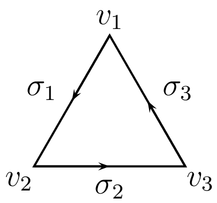
and define ∂ by the same formula

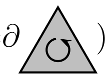
$$\partial_p \sigma = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i [v_0, \cdots, \widehat{v_i}, \cdots, v_p]$$

Then this is well defined and $\partial^2 = 0$.

정의 3 $\cdots \to C_{p+1}(K) \overset{\partial_{p+1}}{\to} C_p(K) \overset{\partial_p}{\to} C_{p-1}(K) \to \cdots$ (:=$\{C_p, \partial\}$) with $\partial^2 = 0$ is called a chain complex.
Define $Z_p(K) = ker\partial_p$ = the group of p-cycles.
$B_p(K) = im\partial_p$ = the group of p-boundaries.
$H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$ = the p-th homology group.

몇가지 object에 대하여 homology group을 계산해 보자.

1. (0) $K =$ 

(=∂ )

먼저 $C_1(K) = \mathbb{Z}\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle = \mathbb{Z}^3$, $C_0(K) = \mathbb{Z}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{Z}^3$임을 알 수 있고, chain complex

$$0 \to C_1(K) \overset{\partial}{\to} C_0(K) \to 0$$

을 얻는다. $H_0(K)$를 구하면, 먼저 $C_0(K)$는 ∂에 의하여 모두 0이 되므로, $Z_0(K) = C_0(K)$임을 알 수 있다. 또한, $\partial\sigma_1 = v_2 - v_1$, $\partial\sigma_2 = v_3 - v_2$, $\partial\sigma_3 = v_1 - v_3$이므로, $B_0(K)$는 $\{v_2 - v_1, v_3 - v_2, v_1 - v_3\}$로 generate되는 $C_0(K)$의 subgroup이다. 이 subgroup의 차원이 2이므로, $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) = \mathbb{Z}$임을 알 수 있다.

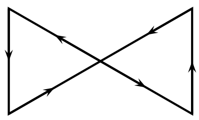
직관적으로 $B_0(K)$에 속하는 원소는 1-simplex의 boundary가 되므로, $H_0(K)$에서는 1-simplex로 연결되어 있는 vertex들은 서로 equivalent한 것으로 보기

때문에, 일반적으로 다음 사실이 성립한다.
Note. $H_o(K) \cong \mathbb{Z}^k$, $k=$ number of connected components of $|K|$.

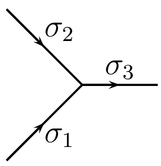
다음으로 $H_1(K)$을 구해보자. 먼저 $B_1(K) = 0$이므로 $H_1(K) = Z_1(K) = ker\partial$이다. 임의의 $c \in C_1(K)$에 대하여, $c = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3$로 쓸 수 있는데, $\partial c = 0$이 되기 위해서는

$$\begin{aligned}\partial c &= n_1\partial\sigma_1 + n_2\partial\sigma_2 + n_3\partial\sigma_3\\ &= n_1(v_2 - v_1) + n_2(v_3 - v_2) + n_3(v_1 - v_3)\\ &= (n_3 - n_1)v_1 + (n_1 - n_2)v_2 + (n_2 - n_3)v_3 = 0\end{aligned}$$

이 되어야 하므로, $n_1 = n_2 = n_3 := n$임을 알 수 있다. 따라서 $H_1(K) = Z_1(K) = \mathbb{Z}\langle\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\rangle \cong \mathbb{Z}$이다.

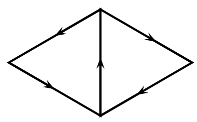
(1) $K_1 =$ 

K_1는 connected이므로, $H_0(K_1) = \mathbb{Z}$이다. $H_1(K_1)$을 구하기 위하여 $Z_1(K_1)$를 알아보자. 위의 (0)에서 논의한 바를 임의의 1-chain c에 적용하면, $\partial c = 0$이기 위한 필요충분조건은 c에 속하는 각 vertex에 대하여 들어오는 1-simplex의 계수와 나가는 1-simplex의 계수가 일치해야 한다는 것임을 알 수 있다. 즉,

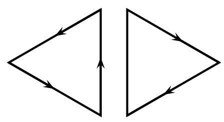


$$c = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3 + \cdots$$

그림과 같이 c가 주어진 경우에 $n_1 + n_2 = n_3$가 되어야 한다. 따라서, K_1의 그림에서 왼쪽 삼각형을 도는 cycle을 c_1, 오른쪽 삼각형을 도는 cycle을 c_2라고 하면 K_1의 1-cycle은 $nc_1 + mc_2$의 꼴로 표현된다. $B_1(K_1) = 0$이므로, $H_1(K_1) \cong \mathbb{Z}^2$이다.

(2) $K_2 =$ 

마찬가지로 $H_0(K_2) = \mathbb{Z}$이고, 1-cycle은 nc_1+mc_2의 꼴로 표현되므로 $H_1(K_2) \cong \mathbb{Z}^2$이다.

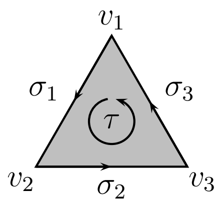
(3) $K_3 =$ 

마찬가지로 $H_0(K_3) = \mathbb{Z}^2$이고, $H_1(K_3) \cong \mathbb{Z}^2$임을 확인할 수 있다.

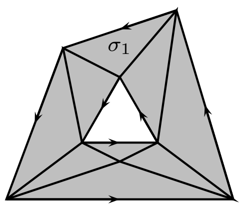
일반적으로, K의 1-dimensional 구멍의 개수를 k라고 했을 때, $H_1(K) = \mathbb{Z}^k$로 주어짐을 위와 같은 방법으로 확인할 수 있다.

숙제 19. G: Graph $\Rightarrow H_1(G) = abel(\pi_1(G))$.

위의 예에서 K_1과 K_2의 homology group이 일치함을 관찰할 수 있는데, 일반적으로 homotopically equivalent한 object들의 homology group은 완전히 일치하게 된다.

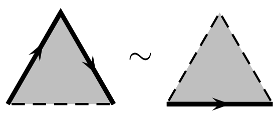
2. (1) $K =$ 

K는 connected이므로 $H_0(K) = \mathbb{Z}$임은 바로 알 수 있다.
K의 1-cycle c는 앞서 알아본 바와 같이 $c = n(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) =: nc_1$의 꼴이다.
그런데 $c_1 = \partial\tau$이므로 $c \sim 0$(homologous to zero)이다. 따라서 $H_1(K) = 0$이다.
또한 $B_2(K) = 0$이므로 $H_2(K) = Z_2(K) = ker\partial$임을 알 수 있는데, $C_2(K)$의 generator τ에 대하여 $\partial\tau = c_1 \neq 0$이므로 $ker\partial = 0$이 되어 $H_2(K) = 0$이다.

(2) $K =$ 

2차원 cell들에 시계반대방향으로 orientation을 준다.
c_1 : 바깥쪽 cycle.
c_2 : 안쪽 cycle.
$\tau = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots$ where σ_i are 2-dimensional cells.

K는 connected이므로 $H_0(K) = \mathbb{Z}$임은 자명하다.

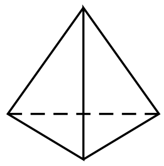


위 그림과 같은 성질을 이용하여 K 내부의 1-cycle은 바깥쪽으로 homologous하게 밀어낼 수 있으므로, K의 essential한 1-cycle은 nc_1의 꼴이 된다. 따라서, $H_1(K) = \langle c_1 \rangle = \mathbb{Z}$.
K의 임의의 2-chain $c = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + \cdots$에 대하여 $\partial c = n_1\partial\sigma_1 + n_2\partial\sigma_2 + \cdots = 0$이면, 앞서 논의한 바와 같이 (이번에는 각 공통변에서의 incidence를 고려하면) $n_1 = n_2 = \cdots$이므로, c가 cycle이라면, $c = n(\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots) = n\tau$의 꼴

이다. 그런데, $\partial c = n\partial\tau = n(c_1 - c_2) = 0$이 되어야 하므로 $n = 0$ 즉, $c = 0$이다. 따라서, $H_2(K) = 0$이다.

일반적으로 boundary가 있는 manifold K에 대하여 이와 같이 생각해 보면 $H_2(K) = 0$이 됨을 알 수 있다.

3. Surfaces

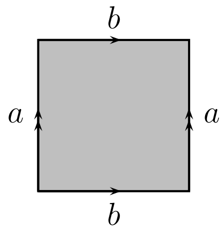
(0) $K =$  $\approx S^2$

orientable surface이므로 boundary에서 서로 상쇄되도록 orientation을 줄 수 있다.

$H_0(K) = \mathbb{Z}$이다.
1-cycle은 위의 2.(2)에서와 같이 옆으로 밀어내면 point와 homologous하게 되므로 $H_1(K) = 0$이다.
2-cycle은 앞서와 마찬가지로 $c = n\tau$, $\tau = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4$의 꼴이 되어야 하는데, $\partial c = n\partial\tau = 0$(orientation을 boundary에서 서로 상쇄되도록 주었으므로)이므로, c가 2-cycle임을 확인할 수 있다. 따라서, $H_2(K) = \langle\tau\rangle = \mathbb{Z}$이다.

뒤에서 살펴보겠지만, 만약 orientable하지 않다면 boundary에서 상쇄되도록 orientation을 줄 수 없으므로 2-cycle이 존재하지 않아 $H_2(K) = 0$이 된다.

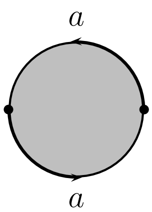
(1) Torus

$K =$ 

Torus에 적당한 trangulation을 주고, boundary에서 상쇄되도록 orientation을 준다.

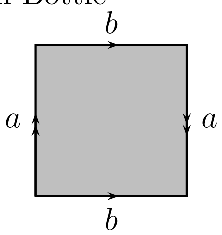
$H_0(K) = \mathbb{Z}$이다.
1-cycle은 바깥쪽으로 밀어낼 수 있으므로, boundary에서의 1-cycle과 같다. 다시말해, $D_1 = Z_1(K) \cap \{\text{boundary chains}\}$라 두면, $Z_1(K) = D_1 + B_1(K)$이다. boundary는 figure eight과 같으므로 $D_1 = Z_1(K) \cap \{\text{boundary chains}\} = \langle a, b\rangle = \mathbb{Z}^2$이다. $B_1(K) \cap D_1$을 구하면, 임의의 2-chain c에 대하여 ∂c가 boundary에 포함되기 위해서는 $c = n\tau$의 꼴이 되어야 하고, 이 때 $\partial c = n\partial\tau = n(b + a - b - a) = 0$이므로 ∂의 image가 되는 1-cycle은 0뿐이다. 따라서 $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = (D_1 + B_1)/B_1 = D_1/(B_1 \cap D_1) = \mathbb{Z}^2$이다.
2-cycle은 앞서와 마찬가지로 $c = n\tau$의 꼴이 되어야 하는데, $\partial c = n\partial\tau = 0$이

므로 c가 2-cycle임을 확인할 수 있다. 따라서, $H_2(K) = \langle \tau \rangle = \mathbb{Z}$이다.

(2) $P^2 =$ 

$H_0(P^2) = \mathbb{Z}$이다.
1-cycle은 boundary에서만 생각하면 되는데 boundary는 circle과 같으므로 $D_1 = \langle a \rangle$이다. $B_1(P^2) \cap D_1$을 구하면, 임의의 2-chain c에 대하여 ∂c가 boundary에 포함되기 위해서는 $c = n\tau$이고, 이 때 $\partial c = n\partial\tau = 2na$이므로 $B_1(P^2) \cap D_1 = \langle 2a \rangle$이 되어 결국 $H_1(P^2) = \langle a \rangle / \langle 2a \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$이다.
2-cycle은 앞서와 마찬가지로 $c = n\tau$의 꼴이 되어야 하는데, $\partial c = n\partial\tau = 2na$이므로 $\partial c = 0$이면 $n = 0$ 즉, $c = 0$이 되어 $H_2(P^2) = 0$이다.

(3) Klein Bottle

$K =$ 

$H_0(K) = \mathbb{Z}$이다.

앞서와 마찬가지로 $D_1 = \langle a, b \rangle$이다. $\partial\tau = b + a - b + a = 2a$이므로 $B_1(K) \cap D_1 = \langle 2a \rangle$이 되고 결국 $H_1(K) = \langle a, b \rangle / \langle 2a \rangle = \mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}$이다.
또한 $\partial\tau = 2a \neq 0$이므로 $H_2(K) = 0$이다.

숙제. 20 Compute $H_*(\overset{g}{\underset{1}{\sharp}} T^2)$ and $H_*(\overset{k}{\underset{1}{\sharp}} P^2)$