VII.2 Definition of singular homology

Let $e_0 = (0, 0, \cdots, 0)$ in $\mathbb{R}^\infty$ (or $\mathbb{R}^N$).
$e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$
$e_2 = (0, 1, \cdots, 0)$
$\vdots$
etc.

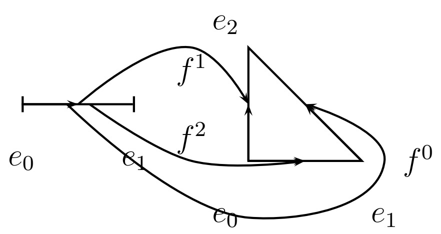
$\triangle^p$ = the simplex spanned by $\{e_0, e_1, \cdots, e_p\}$ = the standard p-simplex.

The i-th face map $f_p^i : \triangle^{p-1} \to \triangle^p$ is an affine map given by

$$f_p^i(e_j) = \left\{ \begin{array}{ll} e_j & j < i \\ e_{j+1} & j \geq i \end{array} \right. .$$

i.e. "$f_p^i(\triangle^{p-1}) = f_p^i(e_0, \cdots, e_{p-1}) = (e_0, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_p)$" $< \triangle^p$.

예



$$\begin{aligned} f^0(e_0, e_1) &= (e_1, e_2) \\ f^1(e_0, e_1) &= (e_0, e_2) \\ f^2(e_0, e_1) &= (e_0, e_1) \end{aligned}$$

Let X be a topological space.
A singular p-simplex in X is a map $\sigma : \triangle^p \to X$.
i-th face $\sigma^{(i)}$ of σ is a map : $\triangle^{p-1} \xrightarrow{f^i} \triangle^p \xrightarrow{\sigma} X$,i.e., $\sigma^{(i)} = \sigma \circ f_p^i$

$S_p(X)$를 singular p-simplices in X에 의해서 generated되는 free abelian group이라고 하자.(more generally, the free R-module generated by singular p-simplices in X) 또는, the group(module) of singular p-chains이라고도 한다.

그러면, $c \in S_p(X)$는 finite sum, $\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i$로 유일하게 표현된다.

이제 boundary operator를 정의하자.
Define a homomorphism $\partial : S_p(X) \to S_{p-1}(X)$ by

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sigma^{(i)} = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sigma \circ f_p^i$$

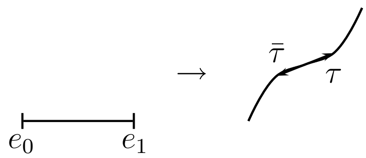
또는 informally,

$$\partial\sigma(e_0, \cdots, e_{p-1}) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sigma(e_0, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_p)$$

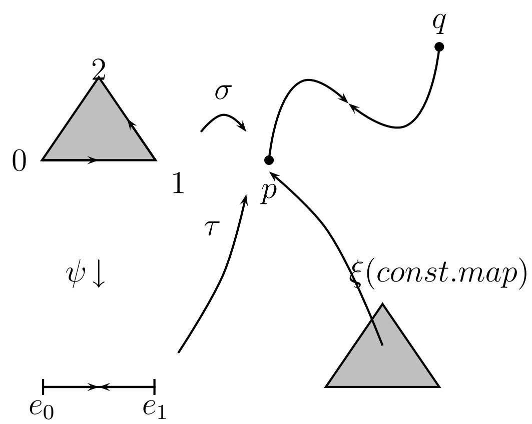
Note
1.∂^2=0 : same as before.

2. **숙제 21(check)** In general, $\sigma(e_0, \cdots, e_i, e_{i+1}, \cdots, e_p) \sim -\sigma(e_0, \cdots, e_{i+1}, e_i, \cdots, e_p)$

p가 1인 경우에 대해서 살펴보자.



위와 같이 주어진 τ와 $\bar{\tau}$에 대해서 $\bar{\tau} + \tau \sim 0$임을 보이자. 다시 말해 어떤 $c \in S_2(X)$에 대해서 $\bar{\tau} + \tau = \partial c$임을 보이면 된다. 아래의 그림과 같이 σ, ξ를 정의하면,



여기서 $\xi : \triangle^2 \to X$는 $\xi(a) = p, \forall a \in \triangle^2$인 constant map이다. 또한, ψ는 2-simplex를 1-simplex로 그림과 같이 collapsing 시키는 map이고 σ를 $\psi \circ \tau$로 정의한다. 그러면,

$\partial\sigma = \sigma^{(0)} - \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} = \sigma(\widehat{0}, 1, 2) - \sigma(0, \widehat{1}, 2) + \sigma(0, 1, \widehat{2}) = \bar{\tau} - p + \tau$이고
$\partial\xi = p - p + p = p$이므로,
$\bar{\tau} + \tau = \partial\sigma + p = \partial\sigma + \partial\xi = \partial(\sigma + \xi)$가 되어서 $\tau \sim \bar{\tau}$임을 알 수 있다.

이제 X의 singular chain complex를 정의하자.
$S(X) = \{S_p(X), \partial\}$을 singular chain complex of X라고 하고,

$$\cdots \to S_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial} S_p(X) \xrightarrow{\partial} S_{p-1}(X) \to \cdots$$

p-th singular homology group of X, $H_p(X)$를

$$H_p(X) := Z_p(X)/B_p(X)$$

where $Z_p(X) = ker\partial_p$ (whose element is called a *cycle*) and $B_p(X) = im\partial_{p+1}$ (whose element is called a *boundary*).

라고 정의한다. 이때 R-module의 경우 ($H_p(X : R)$)와 구별하기 위해서 $H_p(X : \mathbb{Z})$라고 쓰기도 한다.

1. **Functorial property for H_p**
Let $f : X \to Y$ be a map. Then f induces a chain map.

Define $f_\sharp : S(X) \to S(Y)$ by $\sigma \mapsto f \circ \sigma$.Then

「$f_\sharp(\partial\sigma) = f_\sharp(\sum(-1)^i\sigma^{(i)}) = \sum(-1)^i f_\sharp\sigma^{(i)} = \sum(-1)^i f \circ \sigma^{(i)} = \sum(-1)^i f \circ (\sigma \circ f^i) = \sum(-1)^i (f \circ \sigma) \circ f^i = \partial(f \circ \sigma) = \partial(f_\sharp\sigma)$
$\therefore\ f_\sharp\partial = \partial f_\sharp$」

Hence $f_\sharp$ induces a homomorphism $f_*(= H_p(f)) : H_p(X) \to H_p(Y)$.
(1) $id : X \to X \Rightarrow id_* = id$
(2) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \Rightarrow (g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp \Rightarrow (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

$\therefore$ H_p is a covariant functor from the category of topological spaces to the category of abelian groups (R-modules).

2.

$$H_p(point) = \{ \begin{matrix} 0 & p \neq 0 \\ \mathbb{Z} & p = 0 \end{matrix}$$

X가 point이므로 $S_p(X) = < c_p >$이다. 여기서 $c_p : \triangle^p \to X$인 constant map이다. 즉

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & S_3 & \xrightarrow{\partial} & S_2 & \xrightarrow{\partial} & S_1 & \xrightarrow{\partial} & S_0 & \xrightarrow{\partial} & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & & & \\ & & < c_2 > & & < c_1 > & & < c_0 > & & & & \end{array}$$

이다. 그런데 여기서 $\partial c_1 = c_0 - c_0$ 이므로 $S_1 \overset{\partial=0}{\to} S_0$가 되어 $H_0 = \mathbb{Z}$이다. 또한 $\partial c_2 = c_1 - c_1 + c_1 = c_1$이므로 $S_2 \overset{\partial(\cong)}{\to} S_1$가 되어 $H_1 = 0$이다. 이와 같은 방법으로 $p > 2$에 대해서 $H_p = 0$임을 알 수 있다.

3. $\{X_\alpha\}$: path-components of X
$\Rightarrow S_p(X) = \bigoplus_\alpha S_p(X_\alpha)$ since $\triangle^p$ is connected and $\forall c \in S_p(X)$ can be written uniquely as $\sum c_\alpha$. Moreover, $\partial : S_p(X_\alpha) \to S_{p-1}(X_\alpha)$.
$\Rightarrow Z_p(X) = \bigoplus_\alpha Z_p(X_\alpha)$ and $B_p(X) = \bigoplus_\alpha B_p(X_\alpha)$
$\Rightarrow H_p(X) = \bigoplus_\alpha H_p(X_\alpha)$

4. Let X be path-connected. Then $H_0(X) = \mathbb{Z}(or R)$.
증명 (Idea)
$x_0 \in X$를 고정시키자. 그러면 x_0와 임의의 $x \in X$ 사이에는 이 둘을 잇는 path가 존재하고, 1-simplex $\rho : \triangle^1 \to X$의 image를 이 path라고 하면 $\partial\rho = x - x_0$ 가 되고 따라서 $x \sim x_0$이 성립한다.

자세한 증명을 살펴보자.
임의의 $c \in S_0(X)$는 $\sum_{finite} n_i x_i$로 표시할 수 있다. 여기서 x_i는 e_0를 $x_i \in X$로 보내주는 0-simplex이다.
그러면 우선 $c = \partial c_1 \Leftrightarrow \sum n_i = 0$임을 보이자.
$\because (\Rightarrow) c_1 = \sum k_i \sigma_i \Rightarrow c = \partial c_1 = \sum k_i(\sigma_i(1) - \sigma_i(0)) \Rightarrow \sum n_i = \sum(k_i - k_i) = 0$
여기서 σ_i는 1-simplex이다.
$(\Leftarrow) c = \sum n_i x_i - (\sum n_i) x_0 = \sum n_i(x_i - x_0) = \sum n_i \partial\rho_i$
여기서 X가 path-connected라는 조건이 쓰였다.

이제 $S_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$ (or R) $\sum n_i x_i \mapsto \sum n_i$를 생각해보자. 그러면 ϵ는 onto이고, $\epsilon \circ \partial_1 = 0$이다. 또한 앞에서 보였던 것을 이용하면, 만약 X가 path-connected라면 $ker\epsilon = im\partial_1$이 되어 $S_1 \xrightarrow{\partial_1} S_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$은 S_0에서 exact이다. 따라서 $H_0(X) = S_0/ker\epsilon = \mathbb{Z}$가 된다.

□

정의 1 Given a chain complex $\{C, \partial\}$, an epimorphism $C_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ with $\epsilon \circ \partial_1 = 0$ is called an **augmentation**. And the homology of $\cdots \to S_p(X) \to \cdots \xrightarrow{\partial} S_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$ is called a **reduced homology of** X and denoted by $\widetilde{H_p}(X)$.

Note
1. $\widetilde{H_p}(X) = H_p(X)$ if $p \geq 1$
2. $H_0(X) \cong \widetilde{H_0}(X) \bigoplus \mathbb{Z}$, since $S_0(X) \cong ker\epsilon \bigoplus \mathbb{Z}$ and $im\partial_1 \subset ker\epsilon$.
3. $\widetilde{H_p}(point) = 0 \quad \forall p$.

정의 2 A chain complex $\{C_p, \partial\}$ is called **acyclic** if $H_p(C) = 0 \quad \forall p$.
An augmented chain complex $\{C_p, \partial, \epsilon\}$ is called **acyclic** if $\widetilde{H_p}(C) = 0 \quad \forall p$. i.e.,

$$\cdots \to C_{p+1} \xrightarrow{\partial} C_p \xrightarrow{\partial} C_{p-1} \to \cdots$$

is acyclic if and only if it is exact.

Example $\{S_p(pt.), \partial, \epsilon\}$ is acyclic.