VII.4 Mayer-Vietoris Sequence

$\mathcal{U}$-small homology and sd-operator

1. Define a chain map $sd : S_p(X) \to S_p(X)$ naturally : use induction

$p = 0$ $\qquad$ $\begin{array}{c} \cdots \to S_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \\ \downarrow sd_0 = id \ \| \\ \to S_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \end{array}$

$p > 0$: 1st for $i_p \in S_p(\triangle^p) \quad , \forall p$

Define $\beta_p : \triangle'_k(\triangle^p) \to \triangle'_{k+1}(\triangle^p)$ as $\beta(v_0, \cdots, v_k) = (b, v_0, \cdots, v_k)$ where b is a barycenter of $\triangle^p$ and $\triangle'_k(\triangle^p)$ is a subgroup of $S_k(\triangle^p)$ generated by affine singular k-simplices denoted by $(v_0, \cdots, v_k)$.
Then $\partial\beta + \beta\partial = 1$:
Given $\sigma = (x_0, \cdots, x_k) \in \triangle'_k(\triangle^p)$,
$\partial\sigma = \partial(\sigma_\sharp i_k) = \sigma_\sharp(\partial i_k) = \sigma_\sharp(\Sigma(-1)^i(e_0, \cdots, \hat{e_i}, \cdots, e_k)) = \Sigma(-1)^i(x_0, \cdots, \hat{x_i}, \cdots, x_k)$

Now apply the formula for join operator in the proof of Lemma9.(3.Homotopy invariance of homology)
1 st : Define sd for $i \in \triangle_p(\triangle^p)$ as follows.

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dashed, "sd"] & \partial i \arrow[d, "sd"] \\ \beta sd\partial i \arrow[r, leftrightarrow, "\partial", "\beta"'] & sd\partial i \in \triangle_{p-1}(\triangle^p) \end{tikzcd}$$

$sdi := \beta sd\partial i$
Then $\partial sdi = \partial\beta sd\partial i = sd\partial i - \beta\partial sd\partial i = sd\partial i - \beta sd\partial\partial i = sd\partial i$,
i.e., sdi is a chain map.

2nd on X :

$$\begin{tikzcd}
& i_p \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dl, "\sigma_\sharp"] \arrow[dd, "sd"] & & \partial i \arrow[dl, "\sigma_\sharp"] \arrow[dd, "sd"] \\
S_p(X) \arrow[rr] \arrow[dd, dotted, "sd"] & & S_{p-1}(X) \arrow[dd] & \\
& {} \arrow[rr] \arrow[dl, "\sigma_\sharp"] & & {} \arrow[dl, "\sigma_\sharp"] \\
S_p(X) \arrow[rr] & & S_{p-1}(X) &
\end{tikzcd}$$

전과 같이 왼쪽 면이 commute하게 sd_X를 정의
그러면 앞면도 commute하게 되고 따라서 chain map으로 정의된다.
Naturality of sd_p : same as before

2. $sd \simeq id$: chain homotopic.
증명 use AMT.
$sd, id : S(X) \to S(X)$ natural chain maps
$\Rightarrow \exists$ natural chain homopoty $D : sd \simeq id$. □

Note. Cor. of AMT $\Rightarrow$ sd is a natural chain homopoty equivalence.

3. Let $\mathcal{U} = \{A\}$ be s.t. $X = \bigcup\{\mathring{A} | A \in \mathcal{U}\}$. Then $\forall\sigma$: singular p-simplex in $X, \exists m > 0$ s.t. $sd^m(\sigma) \in S_p^{\mathcal{U}}(X)$ where $S_p^{\mathcal{U}}(X) = \{\sigma \in S_p(X) | \sigma(\triangle^p) \subset \mathring{A}$ for some $A \subset \mathcal{U}\}$
증명 $X = \bigcup\{\mathring{A} | A \in \mathcal{U}\} \Rightarrow \triangle^p = \bigcup\{\sigma^{-1}(\mathring{A}) | A \in \mathcal{U}\}$
Let ϵ be a Lebesque number for this open cover.
Choose m s.t. $(\frac{p}{p+1})^m mesh(\triangle^p) < \epsilon$ □

4. Let $\mathcal{U} = \{A\}$ be s.t. $X = \bigcup\{\mathring{A} | A \in \mathcal{U}\}$. Then $i : S^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S(X)$ is a chain homotopy equivalence.
증명 Construct a chain homotopy inverse $\tau : S(X) \to S^{\mathcal{U}}(X)$ s.t. $\tau \circ i = id$ and $i \circ \tau \simeq id$:
Let $m(\sigma)$ be the smallest integer s.t. $sd^{m(\sigma)}(\sigma) \in S_p^{\mathcal{U}}(X)$
Note $m(\sigma) \geq m(\sigma^{(i)})$
Want T s.t. $\partial T + T\partial = i \circ \tau - id$.
$\overset{2.}{\Rightarrow} \exists D$ s.t. $\partial D + D\partial = sd - id$
$\Rightarrow \partial D sd + D sd \partial = sd^2 - sd$

$\vdots$
$\partial D s d^{k-1} + D s d^{k-1} \partial = s d^k - s d^{k-1}$

모두 더하면
$\partial D(1 + \cdots + sd^{k-1}) + D(1 + \cdots + sd^{k-1})\partial = sd^k - id$

Define $T(\sigma) = D(1 + \cdots + sd^{m(\sigma)-1})(\sigma)$
Then $(\partial T + T\partial)(\sigma) = \partial T(\sigma) + T\partial(\sigma)$
$= sd^{m(\sigma)}(\sigma) - \sigma - D(1 + \cdots + sd^{m(\sigma)-1})\partial\sigma + \Sigma(-1)^i D(1 + \cdots + sd^{m(\sigma^{(i)})})^{-1}\sigma^{(i)}$
$= sd^{m(\sigma)}(\sigma) - \sigma - \Sigma(-1)^i D(sd^{m(\sigma^{(i)})} + \cdots + sd^{m(\sigma)-1})\sigma^{(i)}$

$\therefore$ Define $\tau(\sigma) = sd^{m(\sigma)}(\sigma) - \Sigma(-1)^i D(sd^{m(\sigma^{(i)})} + \cdots + sd^{m(\sigma)-1})(\sigma)$

Then $(\partial T + T\partial) = i \circ \tau - id.$

Now note that $\tau \circ i = id$ on $S^{\mathcal{U}}(X)$
($\because$ 이미 $\mathcal{U}$-small 하니까 $m(\sigma) = 0, m(\sigma^{(i)}) = 0$) $\square$

Snake lemma(Zig - Zag lemma)

(1) Given a short exact sequence of chain complexes,

$$0 \to \mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{q} \mathcal{C}'' \to 0$$

where $\mathcal{C} = \{C_p, \partial\}, \cdots$ etc. and i and q are chain maps. Then we can obtain a long exact sequence

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_p(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_*} H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{q_*} H_p(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(\mathcal{C}') \to \cdots$$

여기서 ∂_*는 다음과 같이 정의된다. 우선 $c'' \in Z_p''$에 대해서 $\exists c \in Z_p$ such that $q(c) = c''$ 하고 q가 chain map 이므로 $q \circ \partial(c) = \partial \circ q(c) = \partial(c'') = 0$이 성립해야 한다. 따라서 exactness에 의해서 $i(c') = \partial(c)$를 성립하는 $c' \in Z_{p-1}'$가 존재해야 하고 $\partial_*[c''] := [c']$로 정의한다.

Well-definedness를 check하기 위해서 다음 두가지를 살펴보자. 먼저 c 대신에 다른 $c_1 \in Z_p$를 선택했다고 가정하면, $\exists a \in Z_p'$ such that $i(a) = c - c_1$가 되어 c_1에 의해서 골라진 $c_1' \in Z_{p-1}'$에 대해서 $\partial a = c' - c_1'$가 성립한다. 즉 ∂_*의 정의는 c의 선택과 무관하게 잘 정의된다. 또한 c'' 대신에 $c'' + \partial d''$을 선택해도 잘 정의된다. 여기서 $\partial d''$는 $[c''] = [c'' + \partial d'']$를 성립하는 Z_p''의 다른 원소이다.

이제 long exact sequence의 exactness를 check 해보자.
먼저 $H_p(\mathcal{C})$에서 exact한지를 살펴보면, $q \circ i = 0$이므로 $q_* \circ i_* = 0$이 성립하고 따라서 $im\ i_* \subset ker\ q_*$이 성립한다. 또한 $q(c) = \partial d''$인 c에 대해서 $q(d) = d''$라 두면, $q(c - \partial d) = q(c) - \partial q(d) = q(c) - \partial d'' = 0$ 이므로 $i(c') = c - \partial d$인 $c' \in Z_p'$가 존재한다. 따라서 $[c] = i_*[c']$이 성립해서 $ker\ q_* \subset im\ i_*$ 가 되어 $H_p(\mathcal{C})$에서는 exact하다. 같은 방법으로 diagram chasing을 통해서 $H_p(\mathcal{C}'')$와 $H_p(\mathcal{C}')$에서 exact함을 쉽게 알 수 있다.

(2) 위와 같이 얻어진 long exact sequence는 functorial이다. 즉, 주어진 commutative diagram에 대해서

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & \mathcal{C}' & \xrightarrow{i} & \mathcal{C} & \xrightarrow{q} & \mathcal{C}'' & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha''} & & \\
0 & \rightarrow & \mathcal{D}' & \xrightarrow[j]{} & \mathcal{D} & \xrightarrow[p]{} & \mathcal{D}'' & \rightarrow & 0
\end{array}$$

아래 diagram이 commute한다.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial_*} & H_p(\mathcal{C}') & \rightarrow & H_p(\mathcal{C}) & \rightarrow & H_p(\mathcal{C}'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(\mathcal{C}') & \rightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'_*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha''_*} & & \downarrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{\partial_*} & H_p(\mathcal{D}') & \rightarrow & H_p(\mathcal{D}) & \rightarrow & H_p(\mathcal{D}'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(\mathcal{D}') & \rightarrow & \cdots
\end{array}$$

Mayer-Vietoris sequence

1. Let $\mathcal{U} = \{A, B\}$ be such that $\mathring{A} \cup \mathring{B} = X$. Consider $S_p(A), S_p(B) \subset S_p^{\mathcal{U}}(X)$. Then we have a short exact sequence

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial\oplus\partial & & & & \\
(\star) \quad 0 & \to & S_p(A \cap B) & \xrightarrow{\phi} & S_p(A) \bigoplus S_p(B) & \xrightarrow{\psi} & S_p^{\mathcal{U}}(X) & \to & 0 \\
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial\oplus\partial & & & &
\end{array}
$$

where $\phi(c) = (c, -c)$ and $\psi(a, b) = a + b$.

(Check) ϕ is one-to-one.
ψ is onto.
$\psi \circ \phi = 0$ and $ker\ \psi \subset im\ \phi$

Note ϕ and ψ are chain maps. Furthermore, $(\star)$ is functorial,
i.e., for any $f : (X, A, B) \to (X', A', B')$
$\Rightarrow$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & S(A \cap B) & \xrightarrow{\phi} & S(A) \bigoplus S(B) & \xrightarrow{\psi} & S^{\mathcal{U}}(X) & \to & 0 \\
 & & \downarrow f_\sharp & & \downarrow f_\sharp \oplus f_\sharp & & \downarrow f_\sharp & & \\
0 & \to & S(A' \cap B') & \xrightarrow[\phi]{} & S(A') \bigoplus S(B') & \xrightarrow[\psi]{} & S^{\mathcal{U}}(X') & \to & 0
\end{array}
\qquad \text{commutes}
$$

Hence, by snake lemma, $(\star)$ induces a functorial long exact sequence

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_p(A \cap B) & \xrightarrow{\phi_*} & H_p(A) \bigoplus H_p(B) & \xrightarrow{\psi_*} & H_p^{\mathcal{U}}(X) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(A \cap B) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \oplus f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\
\cdots & \to & H_p(A' \cap B') & \to & H_p(A') \bigoplus H_p(B') & \to & H_p^{\mathcal{U}}(X') & \to & H_{p-1}(A' \cap B') & \to & \cdots
\end{array}
$$

여기서 이 long exact sequence 를 **Mayer-Vietoris sequence** 라고 부른다.

Note $\phi_*(\gamma) = (\gamma, -\gamma)$ and $\psi_*(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$.

이제 $\partial_*\alpha$를 계산해보자. $\alpha \in H_p(X) \cong H_p^{\mathcal{U}}(X)$는 $\alpha = \{a\} = \{a_1 + a_2\}$, for $a_1 \in S_p(A)$ and $a_2 \in S_p(B)$로 생각할 수 있고, 아래의 diagram을 보면,

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & \xrightarrow{\phi} & (a_1, a_2) & \xrightarrow{\psi} & a_1 + a_2 \\ & & \downarrow & & \downarrow \partial \\ \partial a_1 & \rightarrow & (\partial a_1, \partial a_2) & \rightarrow & \partial a_1 + \partial a_2 = 0 \end{array}$$

따라서 $\partial_* \alpha = \partial_* \{a\} = \partial_* \{a_1 + a_2\} = \{\partial a_1\}$가 된다.

2. Mayer-Vietoris sequence holds also for reduced homology if $A \cap B \neq \emptyset$; It suffices to check that $(\star)$ holds for augmented chain complex.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & S_0(A \cap B) & \xrightarrow{\phi} & S_0(A) \bigoplus S_0(B) & \xrightarrow{\psi} & S_0^{\mathcal{U}}(X) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon \oplus \epsilon & & \downarrow \epsilon & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

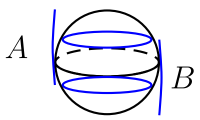
위의 diagram에서 diagram commutativity 를 check 할 수 있으므로 우리는 reduced homology의 funtorial long exact sequence를 얻게 된다.

3.**(Remark)** Mayer-vietoris sequence holds in general for an excisive couple $A, B \subset X (A \cup B = X)$.

$\{A, B\}$ is an *excisive couple* if $S(A) + S(B) \hookrightarrow S(X)$ induces an isomorphism in homology.

4. **Mayer-Vierotis sequence for simplicial homology**
$\triangle(K_1) + \triangle(K_2) = \triangle(K_1 \cup K_2)$ and $C(K_1) + C(K_2) = C(K_1 \cup K_2)$가 성립하므로 simplicial homology에 대한 Mayer-Vietoris sequence가 성립한다.

5.**Example**



(1) $H_*(S^n)$
그림과 같이 A를 북반구와 남반구의 약간을 포함한 것으로 하고 B를 남반구와 북반구의 약간을 포함한 것으로 하면, A와 B는 $\overset{\circ}{D}{}^n$ 즉, point와 homotopy type이 같고, $A \cap B$는 S^{n-1}와 homotopy type이 같다. 따라서 Mayer-vietoris sequence를 적용해보면,

$$\cdots \rightarrow \widetilde{H_p}(A \cap B) \rightarrow \widetilde{H_p}(A) \bigoplus \widetilde{H_p}(B) (= 0) \rightarrow \widetilde{H_p}(S^n) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H_{p-1}}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

$\therefore \widetilde{H_p}(S^n) \cong \widetilde{H_{p-1}}(S^{n-1}) \cong \cdots \cong$가 성립해서 정리하면 다음과 같다.

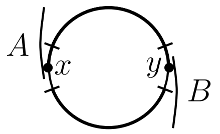
$$
\begin{aligned}
n > 0 \quad & p = n > 0 \Rightarrow \widetilde{H_n}(S^n) \cong \cdots \cong \widetilde{H_0}(S^0) \cong \mathbb{Z} \\
& p > n \Rightarrow \widetilde{H_p}(S^n) \cong \cdots \cong \widetilde{H_{p-n}}(S^0) \cong 0 \\
& p < n \Rightarrow \widetilde{H_p}(S^n) \cong \cdots \cong \widetilde{H_0}(S^{n-p}) \cong 0
\end{aligned}
$$

따라서

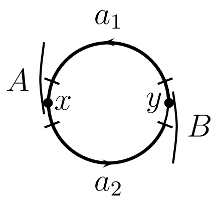
$$H_p(S^n) = \{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & p = 0, n \\ 0 & \text{otherwise} \end{array} .$$

$$H_p(S^0) = \{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z} & p = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{array} .$$

가 성립한다. 이제 $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$의 generator를 생각해보자. 먼저 $H_1(S^1) = \widetilde{H_1}(S^1) \overset{\partial_*}{\cong} \widetilde{H_0}(S^0) = \mathbb{Z}$이므로 $\widetilde{H_0}(S^0)$의 generator를 찾자.



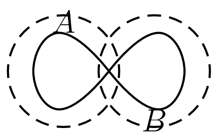
우선 $\cdots \xrightarrow{\partial} S_0(S^0)(= \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$을 살펴보면 $ker\epsilon = (a, -a)$이고 따라서 $S_0(S^0)$의 cycle은 $\langle(1, -1)\rangle$ 이다. 결국 $\widetilde{H_0}(S^0)$의 generator는 $x - y$가 된다.



이제 옆의 그림과 같이 1-chain a_1, a_2를 정의하자. 그러면 앞의 논의에 의해서 $\partial_*(a_1 + a_2) = \partial a_1 = x - y$가 성립한다. 따라서 $H_1(S^1)$의 generator는 $\{a_1 + a_2\}$가 된다.

$H_2(S^2) = \mathbb{Z}$ generator는 무엇인가?(check)

(2)Figure eight(=X) 에 대한 homology를 계산해보자.



그림과 같이 A와 B를 선택하면, A와 B는 S^1과 $A \cap B$는 point와 homotopy type이 같다. 이제 Mayer-Vietoris sequence에 적용시켜보면,

$$\cdots \to \widetilde{H_p}(A\cap B) \to \widetilde{H_p}(A)\bigoplus \widetilde{H_p}(B) \to \widetilde{H_p}(X) \to \widetilde{H_{p-1}}(A\cap B) \to \cdots$$

$\widetilde{H}(pt) = 0$이므로 $\widetilde{H_p}(A)\bigoplus \widetilde{H_p}(B) \cong \widetilde{H_p}(X)$가 되어

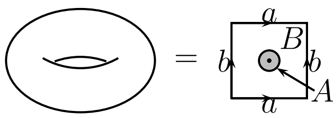
$$\widetilde{H_p}(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}\bigoplus\mathbb{Z} & ,p=1 \\ 0 & ,\text{otherwise} \end{cases}.$$

가 성립한다. 이 방법을 이용하면, 일반적으로
$X = S^1 \vee \underset{r}{\cdots} \vee S^1$ 일 경우

$$\widetilde{H_p}(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}^r & ,p=1 \\ 0 & ,\text{otherwise} \end{cases}.$$

가 성립한다.

(3) **Closed surface**

$X =$ 

오른쪽 그림에서와 같이 Torus에서 한점을 빼준 open set을 B, 그 점을 포함하는 open neighborhood를 A라고 하면 A는 point와 homotopy type이 같고, B는 figure eight 그리고 $A\cap B$는 S^1와 homotopy type이 같다. 따라서 Mayer-Vietoris sequence에 적용하면,

$$\cdots \to \widetilde{H_p}(A\cap B) \to \widetilde{H_p}(A)\bigoplus \widetilde{H_p}(B) \to \widetilde{H_p}(X) \to \widetilde{H_{p-1}}(A\cap B) \to \cdots$$

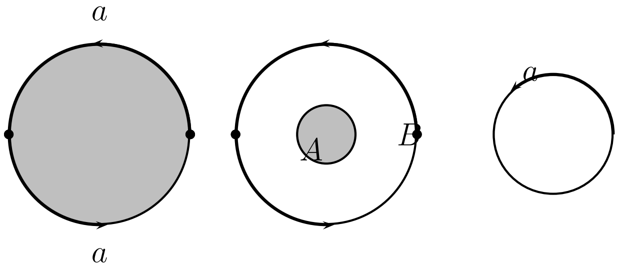
가 되고(여기서 $\widetilde{H_p}(A) = 0$이다.), 특별히

$$0 \to \widetilde{H_2}(X) \to \widetilde{H_1}(S^1) \to \widetilde{H_1}(B) \to \widetilde{H_1}(X) \to \widetilde{H_0}(S^1) \to \cdots$$

를 살펴보면 $(\widetilde{H_2}(B) = 0), \widetilde{H_1}(S^1) \to \widetilde{H_1}(B)$가 zero map 이 되므로 $\widetilde{H_2}(X) \cong \widetilde{H_1}(S^1) = \mathbb{Z}, \widetilde{H_1}(X) \cong \widetilde{H_1}(B) = \mathbb{Z}\bigoplus\mathbb{Z}$가 된다. 또한, $p \geq 3$이면, $\widetilde{H_p}(B) = 0, \widetilde{H_{p-1}}(S^1) = 0$이므로

$$H_p(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ,p=0 \\ \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z} & ,p=1 \\ \mathbb{Z} & ,p=2 \\ 0 & ,\text{otherwise} \end{cases}$$

가 된다.

$X = P^2 =$ 

$\cong B$

P^2에서 두번째 그림과 같이 한점을 빼준 open set을 B, 그점을 포함하는 open neighborhood는 A라고 하면 A는 point, B와 $A \cap B$는 S^1과 homotopy type이 같다. Mayer-Vietoris sequence에 적용하면,

$$\cdots \to \widetilde{H_{p+1}}(X) \to \widetilde{H_p}(S^1) \to \widetilde{H_p}(B) \to \widetilde{H_p}(X) \to \widetilde{H_{p-1}}(S^1) \to \cdots$$

특히,

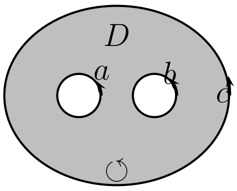
$$0 \to \widetilde{H_2}(X) \xrightarrow{f} \widetilde{H_1}(S^1) \xrightarrow{g} \widetilde{H_1}(B) \xrightarrow{h} \widetilde{H_1}(X) \to \widetilde{H_0}(S^1) \to \cdots$$

를 보면, $g : \widetilde{H_1}(S^1)(= \mathbb{Z}) \to \widetilde{H_1}(B)(= \mathbb{Z})$는 1을 $2a$로 보내는 map이므로 (세번째 그림 참조) injective이다. 따라서 f가 zero map 이 되어, $\widetilde{H_2}(X) = 0$이 된다. 또한 $\widetilde{H_0}(S^1) = 0$이므로 h가 surjective 이고, $\widetilde{H_1}(X) \cong \widetilde{H_1}(B)/ker\ h = \widetilde{H_1}(B)/im\ g \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$가 된다. 즉,

$$H_p(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ,p=0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & ,p=1 \\ 0 & ,\text{otherwise} \end{cases}$$

이다.

Note
그림과 같이 a, b, c 그리고 D를 정의하면, $0 = \{\partial D\} = \{c\} - \{a\} - \{b\}$가 성립하므로, $H_1(X)$안에서 $\{c\} = \{a\} + \{b\}$가 된다.

$X =$ 

마지막으로 P^2에서 coefficient를 $\mathbb{Z}$대신 $\mathbb{R}$ 또는 $\mathbb{Z}/2$를 생각해보자. 우선 $\mathbb{R}$의 경우 $im\ g = \mathbb{R}$이므로 $H_1(P^2, \mathbb{R}) = 0$이 된다. 마찬가지로 $\mathbb{Z}/2$의 경우에는 g가 zero map이 되므로 $H_2(P^2, \mathbb{Z}/2) \cong H_1(S^1, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$, 그리고 $H_1(X, \mathbb{Z}/2) \cong H_1(B, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$가 된다.

숙제23 Compute H_*(closed surface).