VIII. 3 Hopf theorem and $\pi_n(S^n)$

정의 1 (1) Let X be a space. The ***suspension*** of X, ΣX is the quotient space of $X \times [-1, 1]$ obtained by identifying $X \times \{1\}$ to a point and $X \times \{-1\}$ to another point.
(2) Given a map $f : X \to Y$, the ***suspension*** of f, $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$ is defined by $\Sigma f(x, t) = (f(x), t)$.

예. $\Sigma S^n = S^{n+1}$.
Note. $f \simeq g : X \to Y \Rightarrow \Sigma f \simeq \Sigma g : \Sigma X \to \Sigma Y$.

정리 1 $f : S^n \to S^n \Rightarrow deg f = deg(\Sigma f)$

증명 In general, let $f : X \to Y$ so that $\Sigma f : (\Sigma X, X_+, X_-) \to (\Sigma Y, Y_+, Y_-)$.
From MV-sequence, we have a commutative diagram,

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H}_{p+1}(\Sigma X) & \xrightarrow{\partial_*} & \widetilde{H}_p(X) \\ {\scriptstyle (\Sigma f)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \widetilde{H}_{p+1}(\Sigma Y) & \xrightarrow{\partial_*} & \widetilde{H}_p(Y) \end{array}$$

이때, ∂_*가 isomorphism이므로 $deg f = deg(\Sigma f)$임을 알 수 있다. □

정리 2 *$f : S^n \to S^n (= \Sigma S^{n-1}))$, $n \geq 2 \Rightarrow \exists g : S^{n-1} \to S^{n-1}$ such that $f \simeq \Sigma g$.*

보조정리 3 *Let $f : S^n \to S^n$, $n \geq 2$. Then there exist $g : S^n \to S^n$ and $q \in S^n$ such that $f \simeq g$ and $g^{-1}(q) = \emptyset$ or one point.*

증명 (1) may assume $\exists q$ such that $f^{-1}(q)$ is $\emptyset$ or finite set $\{p_0, \cdots, p_k\}$ by simplicial approximation theorem.
f는 simplicial approximation을 가지므로, f를 simplicial map으로 생각해도 된다. 따라서 f는 simplex를 simplex로 보내주므로, S^n에 적당한 triangulation을 주고 한 triangle(simplex) 내부의 점을 생각하면 그 inverse image는 isolated set이다. 따라서 유한집합임을 알 수 있다.

(2) may assume$\{p_0, \cdots, p_k\} \subset \overset{\circ}{E}{}^n_+$ by an isotopy of S^n by "pulling pants".
여기서 isotopy는 homotopy $F : X \times I \to X$이면서 각 $t \in I$에 대하여 $F_t : X \to X$, $F_t(x) = F(x, t)$가 homeomorphism인 map을 뜻한다.

(3) Let L be the union of line segments from p_0 to p_i. Then may assume $f(L) \neq S^n$. ($\because f$는 simplicial map으로 가정했으므로, image가 S^n 전체가 되지는 않는다.)
Since $f(L)$ is compact, there exists U, an ϵ-neighborhood of L contained in $\overset{\circ}{E}{}^n_+$ such that $f(\overline{U}) \neq S^n$. So, may assume $f : (S^n, \overline{U}) \to (S^n, \overset{\circ}{E}{}^n_+)$ and q is the north pole by rotation and pulling pants.

(4) There exists $f_1 \simeq f$ such that $f_1^{-1}(q) = L$.
Let $\mu : S^n \to [0,1]$ be defined by $\mu(x) = \frac{1}{\epsilon} min\{d(x, L), \epsilon\}$ and

$$f_1(x) := \frac{\mu(x)f(x) + (1 - \mu(x))q}{|\mu(x)f(x) + (1 - \mu(x))q|}$$

즉, f_1은 U 바깥에서는 $f_1 = f$, L상에서는 $f_1 = q$인 map이다. 따라서 f와 f_1은 모든 점에서 antipodal이 되지 않고 앞절의 정리에 따라 $f \simeq f_1$이다.

(5) There exists $h : (S^n, L) \to (S^n, p)$ such that $h : S^n \setminus L \to S^n \setminus p$ is a homeomorphism.
Let
$$h(x) = \frac{\mu(x)x + (1 - \mu(x))p}{|\mu(x)x + (1 - \mu(x))p|}.$$
Futhermore h and identity are never antipodal, so $h \simeq id$.

(6)
$$\begin{tikzcd}
 & (S^n, L) \arrow[r, "f_1"] \arrow[dl, "q"'] \arrow[dd, "h"] & (S^n, q) \\
S^n/L \arrow[dr, "\overline{h}"'] & & \\
 & (S^n, p) \arrow[uur, dotted, "\exists g"'] &
\end{tikzcd}$$

(5)에 의하여 $\overline{h}$는 homeomorphism이다. 따라서 h를 quotient map으로 이해할 수 있고 $g^{-1}(q) = p$가 되는 g가 존재한다. 또한

$$f \simeq f_1 = g \circ h \simeq g$$

가 성립하므로 증명이 끝났다. $\square$

정리 2의 증명 n을 north pole, s를 south pole이라고 하자. 위의 보조정리에 의하여 $f^{-1}(n) = \emptyset$ or $\{n\}$이라고 가정해도 된다.
만약 $f^{-1}(n) = \emptyset$이면 $f \simeq c \simeq \Sigma c$ (c: constant map)이므로, $f^{-1}(n) = \{n\}$인 경우만 증명하면 된다.
s의 ball neighborhood B_s를 생각하면, $f(D) \subset B_s^c$인 n의 neighborhood D가

존재한다. 이때, $f(D^c)$는 compact set이고 n을 포함하지 않으므로, $f(D^c) \subset B_n^c$인 n의 neighborhood B_n이 존재한다.

S^n의 isotopy를 이용하여 $D = \mathring{E}^n_+$로 가정해도 무방하다. 따라서, $\partial D = S^{n-1}$이고, $f(S^{n-1}) \subset (B_n \cup B_s)^c$가 성립한다.
τ를 "squeezing deformation" $\tau : (S^n, \partial B_n, \partial B_s) \to (S^n, S^{n-1}, S^{n-1})$라 두자. $\tau((B_n \cup B_s)^c) \subset S^{n-1}$이므로,

$$g := \tau \circ f|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to S^{n-1}$$

이 잘 정의된다. 또한

$$\tau \circ f(E^n_+) \subset E^n_+, \quad \tau \circ f(E^n_-) \subset E^n_-$$

가 성립하므로, Σg와 $\tau \circ f$는 모든 점에서 antipodal이 되지 않고 따라서 $\Sigma g \simeq \tau \circ f \simeq f$ 임을 알 수 있다. □

정리 4 *$deg : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$ is an isomorphism.*

증명 $\alpha_n : S^1 \to S^1$을 $\alpha_n(z) = z^n$으로 정의하면 $deg(\alpha_n) = n$이고, $\pi_1(S^1) = \{[\alpha_n]\}$임을 알 수 있다. $\pi_1(S^1)$에서 $[\alpha_n] + [\alpha_m] = [\alpha_{n+m}]$이 성립하므로 deg는 isomorphism임을 확인할 수 있다. □

정리 5 (Hopf)
$n \geq 1, f \simeq g : S^n \to S^n \Leftrightarrow degf = degg$

증명 Induction on n.
$n = 1$: may assume $f, g : (S^1, 1) \to (S^1, 1)$ by rotations so that $[f], [g] \in \pi_1(S^1)$. Then $degf = degg \Rightarrow [f] = [g] \Rightarrow f \simeq g$.
$n > 1$: $f, g : S^n \to S^n \Rightarrow \exists f_1, g_1 : S^{n-1} \to S^{n-1}$ such that $f \simeq \Sigma f_1$ and $g \simeq \Sigma g_1$.
Then $degf_1 = deg(\Sigma f_1) = degf = degg = deg(\Sigma g_1) = degg_1$. By induction, $f_1 \simeq g_1$. So, $f \simeq g$. □

정리 6 *$deg : \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$ is an isomorphism.*

증명 Induction on n.

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[rr, "\Sigma_*"] \arrow[dr, "deg_{n-1}"'] & & \pi_n(S^n) \arrow[dl, "deg_n"] \\
& \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

정리 1에 의하여 위 diagram이 commute하고, 정리 2에 의하여 Σ_*는 onto이다. Induction에 의하여 deg_{n-1}이 isomorphism이므로 Σ_*가 injection이고 따라서 Σ_*, deg_n는 isomorphism이 된다. □

Remark. (Freudental suspension theorem)
$\Sigma_* : \pi_k(S^n) \to \pi_{k+1}(S^{n+1})$ is an isomorphism for $k < 2n-1$ and onto for $k = 2n-1$.

General version of Hopf's theorem
Let M^n be a closed orientable n-manifold. Then $H_n(M^n) \cong \mathbb{Z}$. So for a map $f : M^n \to S^n$, $degf$ is well-defined.

정리 7 *Let $f : M^n \to S^n$. Then there exist $g : M^n \to S^n$ and $q \in S^n$ such that $f \simeq g$ and $g^{-1}(q) = \emptyset$ or one point.*

증명 Same as 보조정리 3. □

정리 8 (Hopf)
$f \simeq g : M^n \to S^n \Leftrightarrow degf = degg$

증명 숙제 3 □

따름정리 9 $[M^n, S^n] \cong \mathbb{Z}$