VIII.4 Euler characteristic and Lefschetz fixed point theorem

정의 1 Let K be a finite simplicial complex. The Euler characteristic of K is defined by

$$\chi(K) := \sum(-1)^p rk(C_p(K)) = \sum(-1)^p \sharp\{\text{p-simplices of } K\ \}.$$
$$\text{And let} \beta_p = rk(H_p(K)) = \text{the } p\text{-th Betti number} = rk(H_p(|K|)).$$

참고로 앞에서 Betti number를 정의할 때 $H_p(K)$는 simplicial homology이고 $H_p(|K|)$는 singular homology이다. 이 정의가 자연스러운 이유는 simplicial homology와 singular homology사이에 natural equivalence가 있기 때문이다.

1. $\chi(K) = \sum(-1)^p \beta_p$

증명

$$\cdots \to C_{p+1} \to C_p \to C_{p-1} \to \cdots \qquad (*)$$

우선 위의 chain complex가 존재한다는 것은 아래와 같이 두개의 short exact sequence가 존재한다는 것과 동치이다.

$$0 \to Z_p \xrightarrow{i} C_p \xrightarrow{\partial} B_{p-1} \to 0$$

$$0 \to B_p \xrightarrow[i]{} Z_p \longrightarrow H_p \longrightarrow 0$$

따라서,

$rk(C_p) = rk(Z_p) + rk(B_{p-1}),\ \ rk(Z_p) = rk(B_p) + rk(H_p)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \chi &= \sum(-1)^p rk(C_p) = \sum(-1)^p(rk(H_p) + rk(B_p) + rk(B_{p-1}))\\ &= \sum(-1)^p rk(H_p)\end{aligned}$$

□

Structure theorem of R-module
Assume that R is a P.I.D, F is a free R-module of rank s and N is a submodule of F. Then there exists a basis $\{f_1, f_2, \cdots, f_s\}$ of F and $d_1, d_2, \cdots d_s \in R$ such

that

(1) nonzero elements of $\{d_1 f_1, \cdots d_s f_s\}$ form a basis of N.
(2) $d_1 | d_2 | \cdots | d_s$

증명
Reference
Serge Lang, Algebra , pp. 521-522.
Jacobson, Basic Algebra 1, pp. 179-180.

□

따름정리 1 *Let G be an abelian group. Then G=free part $\bigoplus$ torsion part. And define $rk(G) := rk($free part of $G)$*

따름정리 2 *$rk(F) = rk(N) + rk(F/N)$.*
In general,$rk(M) = rk(N) + rk(M/N)$ if

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

is exact.

증명

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "="] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & p^{-1}(N) \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, "p"] & \clubsuit \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

위의 commutative diagram을 살펴보면 nine lemma에 의해서 f가 isomorphism이 되고 따라서, $rk(M) = rk(F) - rk(K) = rk(p^{-1}(N)) + rk(\clubsuit) -$

$rk(K) = rk(N) + rk(M/N)$이 성립한다.

□

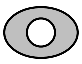
따름정리 3 *If (∗) is acyclic (i.e., exact), then* $\sum(-1)^p rk(C_p) = 0$.

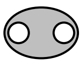
Examples

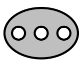
$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{n is odd} \\ 2 & \text{n is even} \end{cases}$$

$(\because H_0(S^n) = H_n(S^n) = \mathbb{Z})$

$\chi(\sum_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$
$(\because H_0(\sum_g) = \mathbb{Z}, H_1(\sum_g) = \mathbb{Z}^{2g}, H_2(\sum_g) = \mathbb{Z})$

χ  $=\chi$  $= 0$

χ  $=\chi$  $= -1$

χ  $=\chi$  $= -2$

2.More generally, given a diagram of homomorphisms of finitely generated modules over P.I.D,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi'=\phi|} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\phi}} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[i]{} & B & \xrightarrow[p]{} & C & \to & 0 \end{array} \quad : \text{exact}$$

where B is free, we have

$$tr(\phi) = tr(\phi') + tr(\bar{\phi})$$

where $tr(\bar{\phi})$ is taken on free part FC of C.
특히, 여기서 ϕ가 identity인 경우 1의 내용과 동일하다.

증명
Let $\{b_1, \cdots, b_k, b_{k+1}, \cdots, b_n\}$ be a basis for B such that $\{d_1 b_1, \cdots, d_k b_k\}$ is a basis for A. And $\phi(b_j) := \sum r_{ij} b_i$. Then
Matrix of $\phi = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} *_1 & * \\ 0 & *_2 \end{pmatrix}$.

where $*_1$ is the matrix of $\phi|$ and $*_2$ is the matrix of $\bar{\phi}$ on $FC =< \bar{b_{k+1}}, \cdots, \bar{b_n} >$.

Note
$\phi|(d_j b_j) = \phi(d_j b_j) = \sum_i r_{ij} d_j b_i$인데 한편, $\phi|(d_j b_j) = \sum a_{ij} d_i b_i$ 이라 두면, $a_{ij} d_i = r_{ij} d_j$가 성립한다. 따라서, $tr(\phi|) = \sum a_{ii} = \sum r_{ii}$이다.

Note내용에 따라 위의 증명이 완성된다.

$\square$

3.Hopf trace formula
Let C be a finitely generated chain complex (of R-module), i.e., each C_p is finitely generated. And $\phi : C \to C$ be a chain map. Then

$$\sum(-1)^p tr(\phi_p, C_p) = \sum(-1)^p tr(\phi_{p*}, H_p(C)/T_p(C))$$

여기서 $T_p(C)$는 $H_p(C)$의 Torsion part이다.

증명

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \to & C_{p+1} & \to & C_p & \to & C_{p-1} & \to & \cdots \\ & & \downarrow \phi_{p+1} & & \downarrow \phi_p & & \downarrow \phi_{p-1} & & \\ \cdots & \to & C_{p+1} & \to & C_p & \to & C_{p-1} & \to & \cdots \end{array}$$

위의 commutative diagram에서 1의 경우와 마찬가지로 아래 두개의 commutative diagram을 얻는다.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Z_p & \to & C_p & \to & B_{p-1} & \to & 0 \\ & & \downarrow \phi_p' & & \downarrow \phi_p & & \downarrow \phi_{p-1}'' & & \\ 0 & \to & Z_p & \to & C_p & \to & B_{p-1} & \to & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B_p & \to & Z_p & \to & H_p & \to & 0 \\ & & \downarrow \phi_p'' & & \downarrow \phi_p' & & \downarrow \phi_{p*} & & \\ 0 & \to & B_p & \to & Z_p & \to & H_p & \to & 0 \end{array}$$

그리고 각각의 diagram에서 $tr(\phi_p) = tr(\phi_p') + tr(\phi_{p-1}'')$ 와 $tr(\phi_p') = tr(\phi_p'') + tr(\phi_{p*})$임을 알 수 있고, 따라서

$tr(\phi_p) = tr(\phi_{p*}) + tr(\phi_p^{''}) + tr(\phi_{p-1}^{''})$
$\Rightarrow \sum(-1)^p tr(\phi_p) = \sum(-1)^p tr(\phi_{p*})$가 성립한다.

□

Note If ϕ= id. $\Rightarrow tr(\phi_p) = rk(C_p)$ and 1 is a special case.

정의 2 Let K be a finite simplicial complex and $f : |K| \to |K|$.
$\lambda(f) := \sum(-1)^p tr(f_*, H_p(|K|)/T_p(|K|))$ = Lefschetz number of f

4.Lefschetz fixed point theorem
Let K be a finite simplicial complex and $f : |K| \to |K|$.
If $\lambda(f) \neq 0$, then f has a fixed point.

우선 S^n의 경우를 살펴보자. $H_0(S^n) \to H_0(S^n)$은 identity이고, $H_n(S^n) \to H_n(S^n)$에서 $tr(f_*) = degf$이므로 $\lambda(f) = 1 + (-1)^n degf$가 되어 $\lambda(f) \neq 0$이라는 것은 $degf \neq (-1)^{n+1}$이라는 것이다. 그리고 이 경우는 이미 앞에서 다루었다.

증명 Assume f has no fixed point and we will prove $\lambda(f) = 0$. Since $|K|$ is compact, there exists $\epsilon > 0$ such that $d(x, f(x)) > \epsilon, \forall x \in |K|$.
May assume $mesh(K) < \epsilon$ by passing to a subdivision.
Let $g : K' \to K$ be a simplicial approximation of f. Recall $\forall \sigma \in K', g(\sigma)$ and $f(\sigma)$ lie in the same simplex $\tau \in K$. Then, $g(\sigma) \cap \sigma = \emptyset$. If not, $g(\sigma) \cap \sigma \neq \emptyset, g(\sigma) \cap \tau \neq \emptyset, f(\sigma) \subset \tau$ and $diam(\tau) < \epsilon$. $\Rightarrow d(x, f(x)) < \epsilon$ for $x \in \sigma \cap g(\sigma)$. It is a contradiction.

Now consider $\phi_p : C_p(K') \xrightarrow{g_\sharp} C_p(K) \xrightarrow{sd} C_p(K')$. Then $tr(\phi_p) = 0$, since the coefficient of σ in $\phi_p(\sigma)$ is 0.

$$\phi_* : \quad \begin{array}{ccccc} H_p(K') & \xrightarrow{g_*} & H_p(K) & \xrightarrow{sd_*} & H_p(K') \\ \downarrow \eta_*^{\cong} & & \downarrow \eta_*^{\cong} & & \downarrow \eta_*^{\cong} \\ H_p(|K|) & \underset{g_* = f_*}{\longrightarrow} & H_p(|K|) & \underset{sd_* = id}{\longrightarrow} & H_p(|K'|) \end{array} \quad \text{commutes}$$

위의 diagram에서 오른쪽 부분의 commutativity는 다음의 diagram으로부터 당연하다.

$$\begin{array}{ccc}
C_p(K) & \xrightarrow{sd} & C_p(K') \\
\mu\uparrow & & \mu\uparrow \\
\triangle_p(K) & \xrightarrow{sd} & \triangle_p(K') \\
\downarrow\theta & & \downarrow\theta \\
S_p(|K|) & \xrightarrow{sd} & S_p(|K'|)
\end{array} \qquad \text{commutes}$$

$\Rightarrow tr(\phi_*) = tr(f_*)$ and $\lambda(f) = \sum(-1)^p tr(f_*) = \sum(-1)^p tr(\phi_*) = \sum(-1)^p tr(\phi_p) = 0$

□

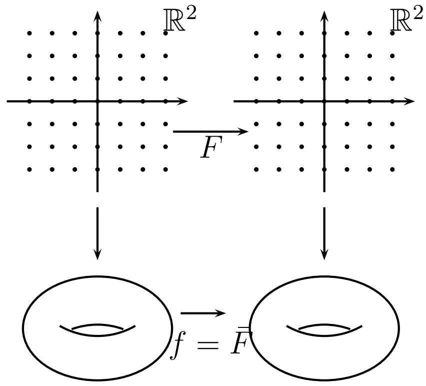
따름정리 4 *(A generalization of Brouwer fixed point theorem)*
Let $|K|$ be acyclic (i.e. $\widetilde{H}(|K|) = 0$) and $f : |K| \to |K|$.
Then, f has a fixed point.

$\because H_0(|K|) = \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda(f) = 1 \neq 0$

Example 1. $f : S^n \to S^n \Rightarrow \lambda(f) = 1 + (-1)^n degf$.
2. $f \simeq id. : |K| \to |K| \Rightarrow \lambda(f) = \lambda(id.) = \chi(|K|)$
If $\chi(|K|) \neq 0 \Rightarrow f \simeq id.$has a fixed point.

S^{2n}에 nonvanishing vector field가 있다고 가정하자. 그러면, 이 vector field를 따라서 flow를 줄 수 있고, flow를 따라서 identity와 homotopic한 map을 생각할 수 있다. 그런데 위의 예는 fixed point가 없는 이 map의 존재성이 S^{2n}의 Euler characteristic이 0이어야 함을 얘기하는 것이므로 모순이다. 따라서 S^{2n}에는 nonvanishing vector field가 존재할 수 없다.
마찬가지로 compact smooth manifold M상에 nonvanishing vector field가 존재하면, $\chi(M) = 0$이 되어야 한다. 실제로는 역도 성립하고 Euler characteristic은 nonvanishing vector field가 존재하기 위한 abstraction으로도 파악될 수 있다.

숙제 4



우선 $\mathbb{R}^2$에 격자$\{(m,n)|m,n \in \mathbb{Z}\}$가 주어져 있다고 하자. 그리고 격자점들을 보존하는 linear map $F(\in GL(2,\mathbb{Z}))$를 생각하자. 이제 torus의 universal covering을 이 $\mathbb{R}^2$라고 할 때, $\mathbb{R}^2$사이의 map F는 $x+\{(m,n)\}$을 $F(x)+\{(m,n)\}$으로 보내는 map이 되므로 torus 사이의 map $f = \bar{F}$를 induce한다. 이때, $\lambda(f)$는 어떻게 되는가?