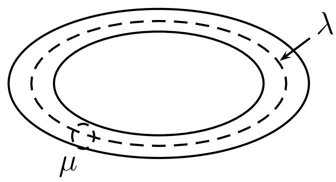
I.4 Poincare Homology 3-sphere

Dehn Surgery :
Let M be a 3-manifold with $\partial M = T^2$.
Given an isotopy class of simple closed curve c on ∂M,
consider an adjunction space, $M(c) = D^2 \times S^1 \underset{h}{\cup} M$ for $h : \partial(D^2 \times S^1) \to \partial M$.
If K is a knot in S^3 and $M = S^3 - N(K)$ for $N(K)$ = tubular neighborhood of K, then $M(c)$ is called a Dehn surgery along K with slope c. $N(K)$ has an obvious meridian μ, but the choice of longitude λ is not clear and defined as follows:

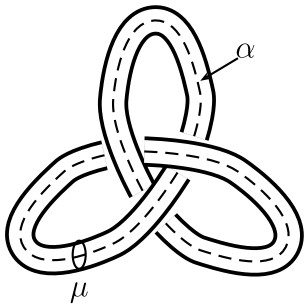
$$\begin{tikzcd}
MV : 0 \arrow[r] & H_1(\partial N) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, equal] & H_1(N) \oplus H_1(M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_1(S^3) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
& \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{Z} \quad \oplus \quad \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 & \\
& \mu \arrow[r, leftrightarrow] & (0,1) & & \\
& \lambda \arrow[r, leftrightarrow] & (1,0) & &
\end{tikzcd}$$

Examples
1. K= trivial not.



먼저 longitude는 $M = S^3 - N(K)$에서 trivial cycle이 되도록 정의되었으므로 그림과 같이 정해 주면 된다. 이 때, $c = p\mu + q\lambda$라고 하면 solid torus로서 M의 meridian은 λ이고 longitude는 μ이므로, $M(c) = L(p, q)$임을 알 수 있다.

2. K =trefoil knot



그림에서 α는 세번 꼬여있으므로 α를 돌면서 μ방향으로 세번 돌면 $M = S^3 - N(K)$에서 trivial cycle이 된다. 따라서 longitude는 $\lambda = \alpha - 3\mu$이다. 이 때 $c = p\mu + q\lambda$라 하고 $M = M(c)$의 homology를 구해보자.
Adjunction space의 MV-sequence에서 exact sequence

$$\cdots \longrightarrow H_q(T^2) \longrightarrow H_q(D^2 \times S^1) \bigoplus H_q(S^3 - N(K)) \longrightarrow H_q(M) \longrightarrow \cdots$$

를 얻는다. 이 때 $D^2 \times S^1 \simeq S^1$이고 $S^3 - N(K) \simeq S^3 - s^1$이다. 따라서 $H_q(M) = 0, q \geq 4$이고, $H_3(M) = H_2(T^2) = \mathbb{Z}$이다. 또한,

$$0 \to H_2(M) \to H_1(T^2) \to H_1(D^2 \times S^1) \bigoplus H_1(S^3 - N(K)) \to H_1(M) \to 0$$

$$x \longmapsto (i_* x, j_* h_* x)$$

$$m \longmapsto (0, j_*(c))$$

$$l \longmapsto (1, ?)$$

이다. 이 때 λ의 정의에 의하여 $j_*(c) = p$이다. 따라서

$$p \neq 0 \Rightarrow H_1(M) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, H_2(M) = 0$$

$$p = 0 \Rightarrow H_1(M) = \mathbb{Z}, H_2(M) = \mathbb{Z}$$

임을 알 수 있다.
특별히 $p = \pm 1$의 경우에는 S^3와 homology type이 같다. 이런 경우에 $M(c)$를 homology sphere라고 부른다. 일반적으로 homology sphere는 sphere와 homology는 같지만 homeomorphic하지는 않다. (Fundamental group이 같지 않다.)