II.4 Examples

1. Projective spaces

(i) Construction

$\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim, \quad x \sim \lambda x,\ \ \lambda \in \mathbb{R}_* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
$[x]$ = equivalence class of x = the line passing through x,
or equivalently $S^n/\sim, x \sim -x,\ \ \forall x \in S^n$ [1]
Similarly , $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim, \quad x \sim \lambda x,\ \ \lambda \in \mathbb{C}_*,$
$(\mathbb{H}P^n = \mathbb{H}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim, \quad x \sim \lambda x,\ \ \lambda \in \mathbb{H}^*)$
or equivalently $S^{2n+1}/\sim\ (S^{4n+3}/\sim), \quad x \sim \lambda x,\ \ |\lambda| = 1,\ \ \lambda \in \mathbb{C}.(\mathbb{H})$

Note. $\begin{array}{c} S^0 \longrightarrow S^n \\ \downarrow \\ \mathbb{R}P^n \end{array}$, $\begin{array}{c} S^1 \rightarrow S^{2n+1} \\ \downarrow \\ \mathbb{C}P^n \end{array}$, $\begin{array}{c} S^3 \rightarrow S^{4n+3} \\ \downarrow \\ \mathbb{H}P^n \end{array}$: Hopf fibration

Note. (1)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^1\backslash 0 \arrow[r, hook, "\subseteq"] \arrow[d] & \mathbb{R}^2\backslash 0 \arrow[r, hook, "\subseteq"] \arrow[d] & \mathbb{R}^3\backslash 0 \arrow[r, hook, "\subseteq"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\subseteq"] & \mathbb{R}^n\backslash 0 \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d] & \mathbb{R}^{n+1}\backslash 0 \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\subseteq"] & \mathbb{R}^\infty\backslash 0 \arrow[d] \\
\mathbb{R}P^0 \arrow[r, "\subseteq"] & \mathbb{R}P^1 \arrow[r, "\subseteq"] & \mathbb{R}P^2 \arrow[r, "\subseteq"] & \cdots \arrow[r, "\subseteq"] & \mathbb{R}P^{n-1} \arrow[r, "\subseteq"] & \mathbb{R}P^n \arrow[r, "\subseteq"] & \cdots \arrow[r, "\subseteq"] & \mathbb{R}P^\infty
\end{tikzcd}$$

Also for $\mathbb{C}$ and $\mathbb{H}$.

(2) $\mathbb{R}P^n$ can be attached as an adjunction space with $(X, A) = (E^n_+, S^{n-1})$ and $Y = \mathbb{R}P^{n-1}$ and $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$, the antipodal identification. (=Hopf map)

Same thing holds for $\mathbb{C}P^n$ and $\mathbb{H}P^n$ with the Hopf map as an attaching map.
(Use $2n-$disk defined by $\{z \in \mathbb{C}^{n+1} | |z| = 1, z_{n+1} \geq 0\}$)
$4n-$ $\mathbb{H}^{n+1}$
Note that $\mathbb{R}P^n\backslash\mathbb{R}P^{n-1}$ = open n-cell.
$\mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^{n-1}$ = open $2n$-cell.
$\mathbb{H}P^n\backslash\mathbb{H}P^{n-1}$ = open $4n$-cell.

---

[1]

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, dotted] & \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \arrow[d, "p"] \\
S^n/\sim \arrow[r, dotted] & \mathbb{R}P^n
\end{tikzcd}$$
continuous, 1-1, onto and compact $\Rightarrow \cong$

$\therefore$ $\mathbb{R}P^n$ is a CW-complex with one k-cell in each $k = 1, 2 \cdots n$.
$\mathbb{C}P^n$ is a CW-complex with one $2k$-cell in each $k = 1, 2 \cdots n$.
$\mathbb{H}P^n$ is a CW-complex with one $4k$-cell in each $k = 1, 2 \cdots n$.

(ii) Homology of $\mathbb{R}P^n$

Consider

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d, equal] & & \mathbb{Z} = <\sigma> \arrow[d, equal] & & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \arrow[d, equal] & & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] \\
H_n(S^{n-1}) \arrow[rr] \arrow[ddd, "p_*"] & & H_n(S^n) \arrow[rr, "j_*"] \arrow[ddd, "p_*"] & & H_n(S^n, S^{n-1}) \arrow[rr, "\partial_*"] \arrow[ddd, "p_*"] & & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[ddd, "p_*"] & H_{n-1}(S^n) \arrow[ddd, "p_*"] \\
& & & H_n(E^n_+, S^{n-1}) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[rr, "\partial^*:\cong"] \arrow[ddr, "p|_*:\cong"] \arrow[d, equal] & & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[ur] \arrow[ddr, "f_*"] \arrow[d, equal] & & \\
& & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \\
H_n(P^{n-1}) \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & H_n(P^n) \arrow[rr] & & H_n(P^n, P^{n-1}) \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & H_{n-1}(P^{n-1}) \arrow[r] & H_{n-1}(P^n) \\
0 & H_{n+1}(S^n, E^n_+) \arrow[uuurr, "\partial_*"] \arrow[d, equal] & & & \mathbb{Z} & & & \\
& H_{n+1}(E^n_-, S^{n-1}) \arrow[d, equal] & & & & & & \\
& 0 & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& \alpha \arrow[rr, "\partial_*"] \arrow[dd] & & \partial_*\alpha \\
\epsilon \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, "\cong"] & & {} \arrow[ur, "\cong"] & \\
& \beta & &
\end{tikzcd}
$$

$\partial_*\alpha =$ generator of $H_{n-1}(S^{n-1}) \Rightarrow \alpha$ is primitive and $H_n(S^n, S^{n-1}) =< j_*\sigma, \alpha >$

Now consider $\gamma = \alpha + (-1)^{n+1}a_*\alpha$, where $a : S^n \to S^n$ antipodal map
$\Rightarrow \partial_*(\alpha + (-1)^{n+1}a_*\alpha) = \partial_*\alpha + (-1)^{n+1}\partial_*a_*\alpha$
$\|$(by functorial property of ∂_*)
$(-1)^{n+1}a_*\partial_*\alpha = (-1)^{n+1}(-1)^n\partial_*\alpha$
$= 0$
$\Rightarrow \gamma = j_*(k\sigma) = kj_*(\sigma)$

Claim. γ is primitive.
$\Rightarrow k = \pm 1$ and may assume $k = 1$ by taking $-\sigma$ as a generator of $H_n(S^n)$ if necessary.
$\Rightarrow \gamma = j_*(\sigma)$

증명(Proof of Claim)

$$
\begin{tikzcd}
 & H_n(E^n_+, S^{n-1}) \arrow[dl] \arrow[d, "i_*:\cong\text{excision}"] \\
H_n(S^n, S^{n-1}) \arrow[r, "j_*"] & H_n(S^n, E^n_-)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \epsilon \arrow[dl] \arrow[d] \\
\alpha \arrow[r] & i_*\epsilon
\end{tikzcd}
$$

Note. $j_*(a_*\alpha) = 0$[2]$\Rightarrow j_*(\gamma) = j_*\alpha = i_*\epsilon$: primitive $\Rightarrow \gamma$: primitive $\square$

Key Observation. $p \cdot a = p$

$$
\begin{tikzcd}
S^n \arrow[d, "p"] & 0 \arrow[r] & H_n(S^n) \arrow[r] \arrow[d, "p_*"] & H_n(S^n, S^{n-1}) \arrow[d, "p_*"] \\
P^n & 0 \arrow[r] & H_n(P^n) \arrow[r] & H_n(P^n, P^{n-1})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[r, mapsto, "j_*"] \arrow[d, mapsto] & \gamma \arrow[d, mapsto] \\
p_*\sigma \arrow[r, mapsto] & (1+(-1)^{n+1})p_*\alpha
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{c}
\gamma = \alpha + (-1)^{n+1}a_*\alpha \\
(p_*\alpha = \beta)
\end{array}
$$

Claim.

$$
p_* : \quad
\begin{tikzcd}
H_n(S^n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_n(P^n) \arrow[d, equal] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "\times 2"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}
\quad \text{if } n \text{ is odd.}
$$

$$
H_n(P^n) = 0 \quad \text{and} \quad p_* = 0 \quad \text{if } n \text{ is even.}
$$

증명 Use induction on n.
n= odd : (n-1 :even)

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] & & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \arrow[d, equal] & & \\
0 \arrow[r] & H_n(S^n) \arrow[rr] \arrow[d] & & H_n(S^n, S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H_n(P^n) \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & H_n(P^n, P^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{n-1}(P^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\text{induction hypothesis}"] & H_{n-1}(P^n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & 0 & 0
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & \gamma \arrow[d, mapsto] \\
p_*\sigma \arrow[r, mapsto] & 2\beta
\end{tikzcd}
$$

2

$$
\begin{tikzcd}
 & H_n(E^n_+, S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "a_*"] & H_n(S^n, S^{n-1}) \arrow[d, "a_*"] & & \\
\text{l.e.s :} \arrow[r] & H_n(E^n_-, S^{n-1}) \arrow[r] & H_n(S^n, S^{n-1}) \arrow[r] & H_n(S^n, E^n_-) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\epsilon \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & \alpha \arrow[d] & \\
a_*\epsilon \arrow[r] & a_*\alpha \arrow[r, "j_*"] & 0
\end{tikzcd}
$$

$\Rightarrow p_* : \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$

n = even : (n-1:odd)

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] & & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \arrow[d, equal] & & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] & & \\
0 \arrow[r] & H_n(S^n) \arrow[rr] \arrow[dd] & & H_n(S^n, S^{n-1}) \arrow[rr, "\partial_*"] \arrow[dd] & & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[dd, "\times 2\text{(induction hypothesis)}"] & 0 \arrow[dd] & \\
 & & & & \begin{matrix} \alpha \mapsto 1 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \beta \mapsto 2 \end{matrix} & & & \\
0 \arrow[r] & H_n(P^n) \arrow[rr] \arrow[d, equal] \arrow[dr] & & H_n(P^n, P^{n-1}) \arrow[rr, "\times 2\text{(injective)}"] \arrow[d, equal] & & H_{n-1}(P^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{n-1}(P^n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & 0 & 0 \arrow[ur] & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & \mathbb{Z}/2 &
\end{tikzcd}
$$

Conclusion. $\begin{pmatrix} H_n(P^n) = & \begin{pmatrix} \mathbb{Z}, & n = odd \\ 0, & n = even \end{pmatrix} & \\ H_{n-1}(P^n) = & \begin{pmatrix} 0, & n = odd \\ \mathbb{Z}/2, & n = even \end{pmatrix} & \\ H_q(P^n) \cong & H_q(P^{n-1}) & if\ q \leq n-2 \end{pmatrix}$ □

Cellular chain complex for P^n

(1) $\mathbb{R}P^n$

$\partial : H_{k+1}(P^{k+1}, P^k) \to H_k(P^k, P^{k-1})$, $(k = 1, 2, \cdots)$ is $\begin{cases} 0, & \text{if } k \text{ is even} \\ \times 2, & \text{if } k \text{ is odd} \end{cases}$.

증명

$$
\begin{tikzcd}
H_{k+1}(E_+^{k+1}, S^k) \arrow[r, "\partial_*", "\cong"'] \arrow[d, "p_*", "\cong"'] & H_k(S^k) \arrow[d, "p_*"] & \\
H_{k+1}(P^{k+1}, P^k) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[rr, bend right, "\partial"'] & H_k(P^k) \arrow[r, "i_*"] & H_k(P^k, P^{k-1})
\end{tikzcd}
$$

Attaching space의 isomorphism[3]에서 왼쪽의 p_*는 isomorphism이다. 먼저 k가 even이면 $H_k(P^k) = 0$이므로 ∂는 0-map이다. 또한 k가 odd이면 $p_* : H_k(S^k) \to H_k(P^k)$는 $\times 2$-map이고 다음 diagram에서 i_*가 isomorphism이다.

$$0 = H_k(P^{k-1}) \longrightarrow H_k(P^k) \xrightarrow{i_*} H_k(P^k, P^{k-1}) \longrightarrow H_{k-1}(P^{k-1}) = 0$$

[3]recall $H_q(X, A) \cong H_q(X \cup_f Y, Y)$

따라서, ∂는 $\times 2$-map이다. $\square$

$C_k = H_k(P^k, P^{k-1})$로 두면 $H_i(P^n) = H_i(C)$이므로, 위 사실로부터 $H_i(P^n)$를 구해보면 다음을 얻는다.

$$H_i(\mathbb{R}P^{2n+1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & 0 < i = \text{odd} < 2n+1 \\ \mathbb{Z} & i = 0, 2n+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{R}P^{2n}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & 0 < i = \text{odd} < 2n \\ \mathbb{Z} & i = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

특히 $\mathbb{R}P^\infty$의 경우에는 다음과 같다.

$$H_i(\mathbb{R}P^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & i = \text{odd} \\ \mathbb{Z} & i = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(2) $\mathbb{C}P^n$ and $\mathbb{H}P^n$
Recall $\mathbb{C}P^n$(or $\mathbb{H}P^n$) is a CW-complex with one cell in each dimension $2j$(or $4j$), $j = 0, 1, \cdots, n$.
So, $C_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 2j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ and $C_k(\mathbb{H}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 4j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

따라서 H_k를 구해보면 다음을 얻는다.

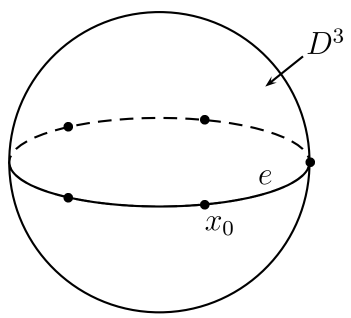
$$H_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 2j, j = 0, \cdots, n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H_k(\mathbb{H}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 4j, j = 0, \cdots, n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

또한 $H_k(\mathbb{C}P^\infty)$와 $H_k(\mathbb{H}P^\infty)$의 경우도 위와 마찬가지로 구할 수 있다.

2. Lens space revisited

Second description of Lens space $L(p,q), p \geq 1 (p, q$: relatively prime$)$.



Lens space는 왼쪽 그림과 같은 D^3에서 $\partial D^3 = S^2$의 점들을 다음과 같이 identify하여 얻어진다. $(z,t) \in E^2_+ \subset S^2 \subset \partial D^3$에 대하여

$$(z,t) \sim (e^{\frac{2\pi i q}{p}} z, -t)$$

즉, 북반구의 점들을 q/p바퀴 회전하여 대칭되는 남반구의 점들과 identify하고 적도의 점들은 p등분하여 모두 identify한 것이다.

특별히 $q = 1$, $p = 2$의 경우에는 $\mathbb{R}P^n$이 얻어짐을 알 수 있다.

Lens space를 이와 같이 정의하면 이는 manifold가 된다. 내부의 점에서는 locally Euclidean이 되는 ball neighborhood를 잡을 수 있고 적도를 제외한 표면의 점에서는 위쪽과 아래쪽에서 2개, 적도위의 점에서는 p개의 ball neighborhood의 조각이 생기는데 각각의 identificaion에 의해 붙여주면 locally Euclidean이 됨을 알 수 있다.

$L(p,q)$의 cell-structure :
one 3-cell coming from D^3
one 2-cell coming from $E^2_+ \subset \partial D^3$
one 1-cell coming from e
one 0-cell coming from x_0

따라서 $C_k = \mathbb{Z}$이고 다음의 sequence를 얻는다.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_3 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times p} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

이 때 boundary map은 실제로 boundary를 계산하면 되므로 위와 같이 주어진다. 여기서 $\partial_2 = \times p$이므로 $im\partial_3 \subset ker\partial_2 = 0$에서 $\partial_3 = 0$이 된다. 따라서 homology를 계산하면

$$H_3 = \mathbb{Z},\ H_2 = 0,\ H_1 = \mathbb{Z}/p,\ H_0 = \mathbb{Z}$$

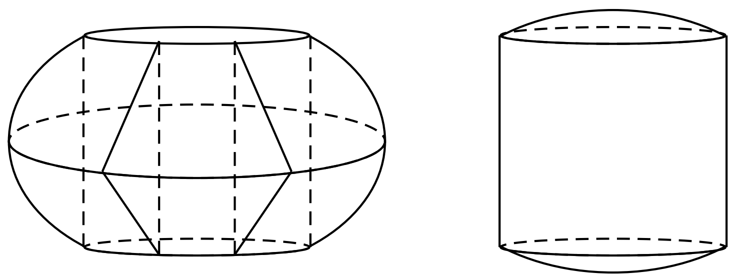
를 얻는다.

Third description
$S^3 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$
free $\mathbb{Z}/p$-action on S^3: $e^{\frac{2\pi i}{p}} \cdot (z_1, z_2) = (e^{\frac{2\pi i}{p}} z_1, e^{\frac{2\pi i q}{p}} z_2)$ $\Rightarrow$covering action
Define

$$S^3/(\mathbb{Z}/p) = L(p, q)$$

이 정의는 앞의 second description과 일치한다. S^3에서 먼저 z_1 방향으로는 $1/p$바퀴 회전하여 identify했으므로 z_1방향으로 $1/p$만큼만 보면 lune 모양의 fundamental domain이 나오고 이것을 D^3로 생각할 수 있다. 또한 z_2방향으로 q/p바퀴, z_1방향으로 $1/p$바퀴 회전하여 identify한 것이므로 D^3에서 생각하면 앞의 second identification과 일치함을 알 수 있다.

이제 second description과 앞절에서의 Lens space의 정의와 일치함을 알아보자.



Second description에서 D^3를 위의 그림과 같이 두 부분의 합집합으로 생각해 보자. 왼쪽의 도형에서 그림과 같이 p등분하여 겉면에 주어진 identification에 따라 붙이면 solid torus가 된다. 또한 오른쪽에서는 윗면과 아랫면을 q/p바퀴 회전한 후 identify하여야 하므로 역시 solid torus가 된다.
따라서 두 개의 solid torus가 얻어지는데 각각의 겉면은 원래 같은 것을 분리한 것이므로 identify하여야 한다. 따라서 다음의 숙제를 하고 나면 두 description이 일치함을 확인할 수 있다.

숙제 10. 위에서 얻어진 두 solid torus의 겉면에 주어진 identification은 m(왼쪽)을 $qm + pl$(오른쪽)에 대응시킴을 확인하라.