Definition

정의 1 *A* **topological manifold** *of dimension n is a topological space M which is locally Euclidean, i.e., $\forall\ p \in M$, $\exists$ a neighborhood U and $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ such that ϕ is a homeomorphism onto an open subset of $\mathbb{R}^n$. (U, ϕ) is called a coordinate chart.*

예. $\mathbb{R}^n$, S^n , $\sum_g$(=closed surface of genus g),$\cdots$

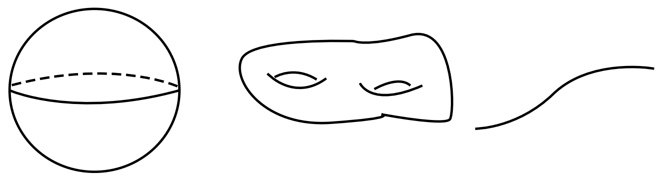

그림 1

즉 위의 예들에 대해서 local 하게는 좌표를 줄 수 있다. 이 때 ϕ^{-1}를 parametrization이라 부르기도 한다.

Note.
1. Local topological properties of a manifold are inherited from those of Euclidean space : local connectedness, local compactness.
2. non-Hausdorff manifold :
$\mathbb{R}$에서 원점을 빼고 대신 O,O'을 넣은 것을 생각해보자.

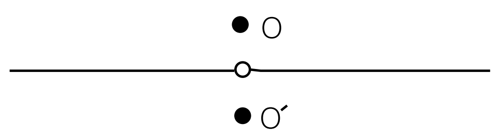

그림 2

위의 그림에다 다음과 같이 open set을 주자. O의 근방을 실직선의 원점을 뺀 원점의 근방과 O을 포함한 것으로 주고 O'도 마찬가지로 준다. 그러면 이 때 이는 manifold가 되지만 Hausdorff 는 되지 못한다. 왜냐하면 O를 포함하는 임의의 open set U와 O'를 포함하는 임의의 open set V는 separation 이 불가능하기 때문이다.

Assume M is Hausdorff

정의 2 *1. A* **differentiable structure** $\mathcal{F}$ *of class* $\mathcal{C}^k (0 \leq k \leq \infty)$ *on a topological manifold M is a collection of coordinate charts* $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ *such that*
(1) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$
(2) (U_α, ϕ_α) *and* (U_β, ϕ_β) *are* $\mathcal{C}^k$*-related, i.e.,* $g_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ *is* $\mathcal{C}^k$, $\forall \alpha, \beta \in A$.
(3) $\mathcal{F}$ *is maximal with respect to (2).* 즉 (U, ϕ) 가 모든 $\alpha \in A$에 대해 (U_α, ϕ_α)와 $\mathcal{C}^k$*-related* 되는 *coordinate chart* 라면, 이 때 $(U, \phi) \in \mathcal{F}$ 이다.
2. A topology manifold M with a differentiable structure $\mathcal{F}$ *of class* $\mathcal{C}^k$ *is called a* **differentiable manifold** *of class* $\mathcal{C}^k$ *or simply* $\mathcal{C}^k$**-manifold.**

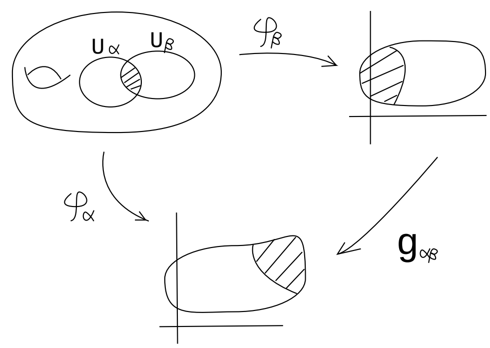

그림 3

사실 위 정의 1에서 (3)번은 꼭 필요한 조건은 아니다. 이는 다음 노트에서 확인할 수 있다.
Note. A collection of coordinate chart satisfying (1) and (2) is called an *atlas.* A differentiable structure $\mathcal{F}$ is also called a *maximal atlas.* An atlas $\mathcal{F}_0$ is contained in a unique maximal atlas :
$\mathcal{F} = \{(U, \phi) \mid (U, \phi)$ *and* (V, ψ) *are* $\mathcal{C}^k$*-related,* $\forall (V, \psi) \in \mathcal{F}_0\}$ 라고 두면 된다.
Hence an atlas determines a differentiable structure of M.

Note. 1. $\mathcal{C}^0$ manifold = topological manifold.
2. $\mathcal{C}^k$ and $l < k \Rightarrow \mathcal{C}^l$, and conversely $\mathcal{C}^1$-manifold admits $\mathcal{C}^\infty$-structure unique up to diffeomorphism.(cf. Hirsch) Hence we are mainly concerned with only

$\mathcal{C}^\infty$-manifold, and we simply call it smooth manifold.(or differentiable manifold.)
3. $\mathcal{C}^\omega$-structure = real analytic structure.

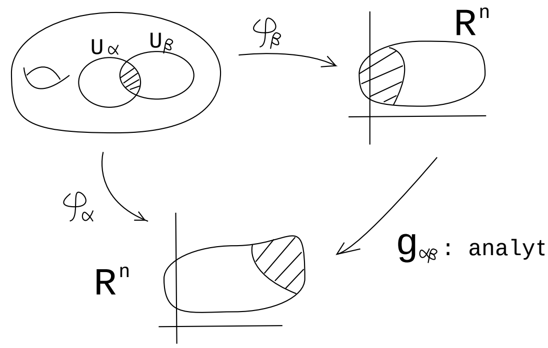

그림 4

즉 위의 그림에서 transition map $g_{\alpha\beta}$가 analytic 일 때 M을 real analytic structure를 가지고 있다고 한다. 만일 위 그림에서 $\mathbb{R}^n$ 대신 $\mathbb{C}^n$ 이고, 이 때 $g_{\alpha\beta}$가 complex analytic 이라면 이 때는 M이 complex analytic structure를 가지게 된다. 좀 더 rigid한 structure에 대해서도 비슷한 이야기를 할 수 있다.
예1) Euclidean structure(= Riemannian flat structure, i.e., constant "sectional curvature" κ=0.)
$g_{\alpha\beta} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$가 rigid motion일 때, 즉 orthogonal transformation과 tranlation으로 이루어져 있을 때 이다.

예2) Spherical structure(Riemannian manifold of constant sectional curvature κ=1)
이 경우에는 coordinate chart map이 $\mathbb{R}^n$ 이 아니라 S^n에 가도록 하고, $g_{\alpha\beta}$가 isometry(길이와 각을 보존하는 map, i.e., sphere 의 rotation 또는 reflection들) 일 때이다.

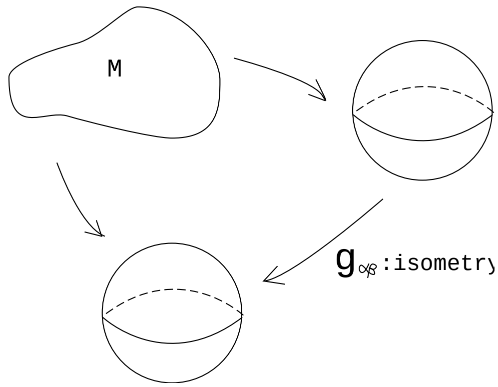

그림 5

예3) Hyperbolic structure(Remannian manifold of constant sectional curvature $\kappa = -1$.)
이 경우 coordinate chart map이 $\mathbb{R}^n$ 대신 "$\mathbb{H}^n$"에 가도록 하고 $g_{\alpha\beta}$가 isometry일 때이다.

이 이외에도 conformal structure($g_{\alpha\beta}$가 각을 보존하는 경우), affine structure 등을 생각할 수 있다.