Examples and review of implicit function theorem.

1. $\mathbb{R}^n$**.**
$\{(\mathbb{R}^n, id)\}$를 생각하면, 이는 atlas가 되고 이 때 이것을 standard structure라고 한다. 참고로, n=4이외의 모든 $\mathbb{R}^n$에 대해서는 standard structure 이외의 structure(exotic structure)가 존재하지 않음이 알려져 있다. n=4의 경우 무수히 많은 exotic structure를 가지고 있다.

2. $\mathbb{S}^n$: 세 가지 방법으로 살펴보자.

(1)

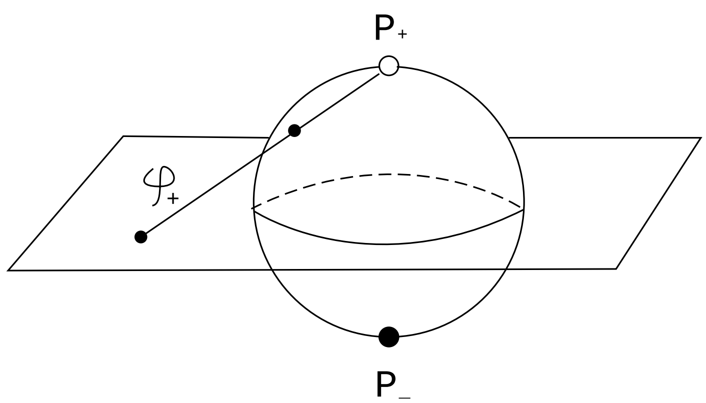

그림 6

$\mathbb{S}^n$에서 북극 p_+를 제외한 나머지 U_+와 p_-를 제외한 나머지 U_- 두개의 open set을 생각해보자. 그리고 각각의 open set에서 stereographic projection을 구해보자. 먼저 $\mathbb{S}^n \backslash \{p_+\}$ 위에서 stereographic projection ϕ_+ 를 구해보면
$\phi_+ : \mathbb{S}^n \backslash \{p_+\} \to \mathbb{R}^n \ , \ \ (x_1, \cdots, x_{n+1}) \mapsto y = \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \cdots, x_n)$이고 또한
$\phi_- : \mathbb{S}^n \backslash \{p_-\} \to \mathbb{R}^n \ , \ \ (x_1, \cdots, x_{n+1}) \mapsto y = \frac{1}{1+x_{n+1}}(x_1, \cdots, x_n)$ 이다.
이 때, 두 개의 chart가 $\mathcal{C}^k$-related 임을 보이기위해 ϕ_+^{-1}을 구해보면
$\phi_+^{-1} : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{S}^n \backslash \{p_+\} \ , \ \ (y_1, \cdots, y_n) \mapsto y = \frac{2}{1+|y|^2}(y_1, \cdots, y_n, \frac{|y|^2-1}{2})$
이므로 따라서 $(\phi_- \circ \phi_+^{-1})(y) = \frac{y}{|y|^2}$ 이다. $\phi_- \circ \phi_+^{-1}$이 정의역에서 0는 빠지므로 이는 smooth map이고 따라서 $\mathcal{C}^k$-related 임을 보였다.(사실은 conformal, real analytic 까지도 만족한다)

(2)

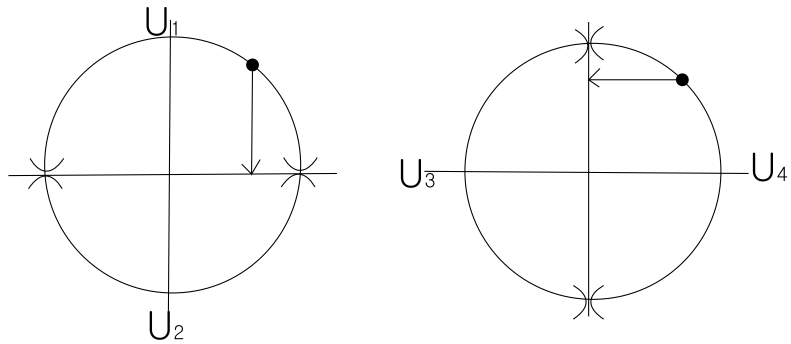

그림 7

U_1, U_2를 $\mathbb{S}^1$의 윗부분과 아랫부분으로 두고 U_3, U_4를 왼쪽, 오른쪽 부분으로 둔 다음 각각 projection map을 생각해서 이를 $\phi_i, i = 1, 2, 3, 4$로 두자. 그러면 이 때 $\{(U_i, \phi_i) \mid i = 1, 2, 3, 4\}$는 atlas가 됨을 보일 수 있다.

숙제1. (1)에 의해 generated된 maximal atlas $\mathcal{F}$와 (2)에 의해 generated된 maximal atlas $\mathcal{F}$가 같음을 보여라. (다시 말해 (1)과 (2)는 $\mathbb{S}^n$상에 같은 smooth structure를 준다.)

(3) $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) = |x|^2 - 1 = 0\}$ 으로 표현할 수 있고 이는 smooth structure를 가짐을 다음 정리에 의해 보일 수 있다.

명제 1 *Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a $\mathcal{C}^\infty$-map, $M = f^{-1}(0) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid f(p) = 0\}$(이런 것을 hypersurface라 부른다.) Assume $M \neq \emptyset, \nabla f = grad\ f$ is nonsingular on M. Then M is a $\mathcal{C}^\infty$-manifold.*

즉 위 명제에 따른다면 $f(x) = |x|^2 - 1 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - 1$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2x_i$ 이므로 $\nabla f = 2(x_1, \cdots, x_{n+1}) \neq 0$ 이 되어 M은 smooth structure를 가진다는 것을 알 수 있다.
위 명제의 증명을 위해서 Inverse function theorem, Implicit function theorem을 다시 한 번 살펴보자.

정리 2 *(Inverse function theorem)*

Let $U \subset \mathbb{R}^n$ be an open subset, $f : U \to \mathbb{R}^n$ be a $\mathcal{C}^k$-map, $1 \leq k \leq \omega$. If the Jacobian matrix $\frac{\partial f}{\partial x} = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ is nonsingular at $p \in U$, then f is a local diffeomorphism at p, i.e.,
$\exists V$, a neighborhood of p such that $f|_V : V \to f(V)$ is a $\mathcal{C}^k$-homeomorphism and $f|_V^{-1}$ is also $\mathcal{C}^k$.

(증명) Munkres : Analysis on Manifold 참조.
위 정리로부터 Implicit function theorem을 이끌어 낼 수 있다.

정리 3 *(Implicit function theorem)*
Let $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ be open, $f : U \to \mathbb{R}^m$ be a $\mathcal{C}^k$-map $(1 \leq k \leq \omega)$, $p = (a, b) \in U$. If $f(p) = 0$ and the $m \times m$ matrix $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ is nonsingular, then $f(x, y) = 0$ can be solved locally for $y = g(x)$, i.e., $\exists V \subset \mathbb{R}^n$, a neighborhood of a and $W \subset \mathbb{R}^m$ of b with $V \times W \subset U$ and $\exists \mathcal{C}^k$-map $g : V \to W$, such that $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x), \forall (x, y) \in V \times W$.

(sketch of proof)

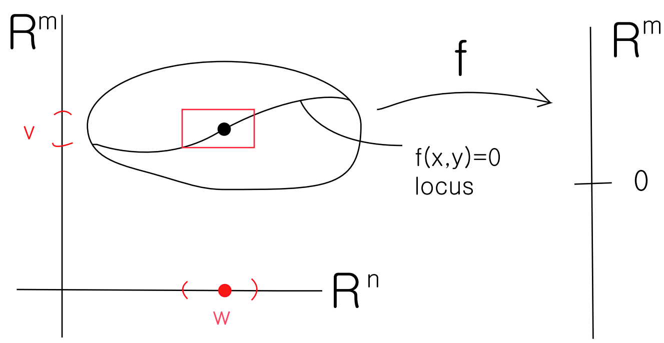

그림 8

$(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ 에 대해 $F : U \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$, $(x, y) \mapsto (x, f(x, y))$를 생각하자. 이 때 F의 Jacobian matrix를 살펴보면

$$DF = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix},$$

이고 따라서 det DF$= det\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ 이므로 Inverse function theorem의 조건을 만족한다. 즉 $G = F^{-1}$ 가 존재해서 $G(x, z) = (x, h(x, z))$ 로 표현할 수 있고 이 때 $g(x) := h(x, 0)$ 가 바로 원하는 explicit function이 된다. $\square$

이제 이로부터 명제1을 증명해보자.
(명제 1의 증명) $\forall p \in M, \nabla f(p) \neq 0$ 이므로 $\frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \neq 0$ 이라고 가정해도 일반성을 잃지 않는다. Implicit function theorem에 의해 $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$은 적당한 p의 근방에서 $x_n = g(x_1, \cdots, x_{n-1})$, $g \in \mathcal{C}^\infty$ 으로 풀 수 있다.
이 때 다음과 같이 함수 G를 정의하자.

$$G : V \to \mathbb{R}^n \ , \ G(q) = (q, g(q)) \in M.$$

그러면 이는 당연히 $\mathcal{C}^\infty$-map이 되고 이것은 바로 graph map이 된다. 이제 M에 coordinate chart를 주기 위해 다음 함수를 생각하자.

$$\phi := G^{-1} : U = G(V) \to V(\subset \mathbb{R}^{n-1}).$$

그러면 이 (U, ϕ)는 p근방에서의 M의 coordinate chart 가 된다. ϕ는 graph map(은 embedding이다) G의 역함수이므로 homeomorphism이 되고 이제 이런 식으로 정의된 (U, ϕ)들간의 $\mathcal{C}^k$-related 여부만 확인하면 된다. 만일 $(\widetilde{U}, \widetilde{\phi})$가 위의 방식으로 만들어진 또 다른 chart라고 하면 $g \in \mathcal{C}^\infty$이고 $\widetilde{\phi}$는 projection이므로 $\widetilde{\phi} \circ \phi^{-1} = \widetilde{\phi} \circ G$는 $\mathcal{C}^\infty$ 이다. $\phi \circ \widetilde{\phi}^{-1}$에 대해서도 마찬가지이다. 따라서 $\{(U_p, \phi_p) \,|\, p \in M\}$ 은 M의 chart 가 된다. $\square$

앞 section에서 $\mathbb{S}^n$의 chart들 (2) 에 의해 만들어지는 atlas와 (3)의 atlas는 서로 같다. 왜냐하면 사실 (2)의 ϕ map 자체가 projection map이므로 이것이 바로 (3)에서 쓰는 explicit map이기 때문이다.

예. $f(x, y, z) = (r-2)^2 + z^2 - 1$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
위 함수는 $\nabla f \neq 0$를 만족한다. 따라서 명제 1에 의해 이 함수의 0-locus M은 $\mathcal{C}^\infty$ structure를 가짐을 알 수 있다. 사실 M은 torus가 된다.

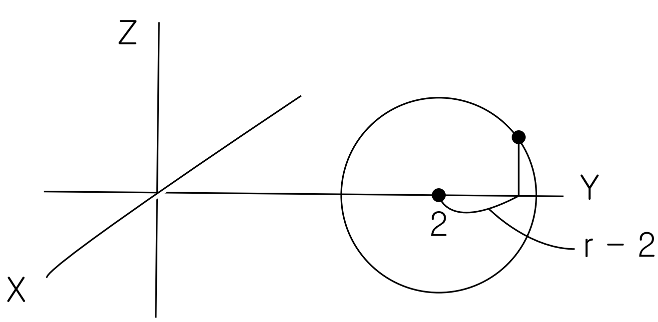

그림 9

Exercise. Generalize the above proposition to $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.