Further Examples.

3. $\mathbb{R}P^n$=Real Projective space.
$\mathbb{R}P^n$=$\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\sim$, where $x \sim \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
$[x]$ =equivalence class of $x = (x_1, \cdots, x_{n+1})$, denoted by $[x_1 : \cdots : x_{n+1}]$.
위와 같이 정의된 $\mathbb{R}P^n$에 대해 coordinate chart를 다음과 같이 준다.
$U_i = \{[x_1 : \cdots : x_{n+1}] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$ and $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ by
$\phi([x_1 : \cdots : x_{n+1}]) = (\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \cdot\cdot, \frac{\hat{x_i}}{x_i}, \cdot\cdot, \frac{x_{n+1}}{x_i})$ (여기서 $\wedge$는 뺀다는 뜻이다.)
이 때 U_i들은 $\mathbb{R}P^n$을 cover하고 이제 각 ϕ_i가 $\mathcal{C}^k$- related되어 있음을 보이자.
$i < j$라고 가정하면,$\phi_i(U_i \cap U_j)$ 를 취했을 때는 i번째 성분이 없어지고
$\phi_j(U_i \cap U_j)$에서는 없어지지 않으므로 다음을 알 수 있다.
$\phi_i(U_i \cap U_j) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_{j-1} \neq 0\} := V$,
$\phi_j(U_i \cap U_j) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \ a_i \neq 0\} := W$ and
$(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(a_1, \cdot\cdot, a_n) = \phi_i([a_1 : \cdots 1 : \cdot\cdot : a_n]) = (\frac{a_1}{a_i}, \cdot\cdot, \frac{\hat{a_i}}{a_i}, \cdot\cdot, \frac{1}{a_i}, \cdot\cdot, \frac{a_n}{a_i}) : W \to V$.
위의$(\phi_i \circ \phi_j^{-1})$는 rational map이므로 $\mathcal{C}^\infty$ 뿐 아니라 $\mathcal{C}^\omega$ 까지도 된다. $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$에 대해서도 마찬가지이고 따라서 $\mathcal{C}^\infty$-related 되어 있다.

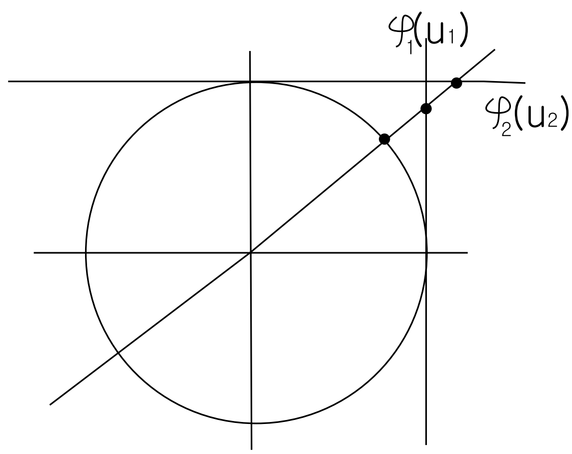

그림 10

사실 U_i가 $\mathbb{R}P^n$에서 open이고, ϕ_i가 homeomorphism임도 보여야 한다. U_i가 $\mathbb{R}P^n$에서 open이라는 사실은 quotient topology 를 이용해서 open임을 알 수 있고 ϕ_i가 homeomorphism이라는 것도 쉽게 보일 수 있다. $\mathbb{R}P^n$의 topology를 quotient topology를 쓰지 않고 다음과 같이 weak topology를 사용하여 정의하여도 같은 결과를 얻는다.

Note. In this example, the topology of $\mathbb{R}P^n$ is given by the quotient topology and also can be viewed as a weak(or coherent) topology as follows :

$$\text{Let } X = \bigcup_{\alpha} X_\alpha, \text{ and } X_\alpha \text{ be a topological space, } \forall \alpha.$$

Assume
(1) 모든 α, β에 대해 $X_\alpha \cap X_\beta$의 topology는 X_α의 subspace로 보나 X_β의 subspace로 보나 topology 가 같다.
(2)$X_\alpha \cap X_\beta$ is open in X_α and in X_β, $\forall \alpha, \beta$.

Let $\mathcal{T} = \{A \subset X \mid A \cap X_\alpha \ \textit{is open in} \ X_\alpha \,, \forall\, \alpha\}$, then $\mathcal{T}$ is a unique topology of X, called weak(or coherent) topology, such that
(a) original topology of X_α=subspace topology of X_α in X with respect to $\mathcal{T}$.
(b) X_α is open in X.

숙제2(optional) 위 note의 내용을 증명하라.

이제 다시 $\mathbb{R}P^n$으로 돌아가서 set으로서의 $\mathbb{R}P^n = \bigcup_i U_i$ 에다가 topology 를 준다. ϕ_i가 homeomorphism이 되도록 각 U_i에다가 $\mathbb{R}^n$과 같은 topology를 주자. 그러면 이 때 가정 (1),(2)를 만족함을 알 수 있고 따라서 $\mathbb{R}P^n$에 각 U_i들의 topology를 coherent하게 연결하는 weak topology를 줄 수 있게 되어 각 U_i는 $\mathbb{R}P^n$에서 open 임을 알 수 있다.

4. $\mathbb{C}P^n$=Complex projective space.
예3 에서 $\mathbb{R}$ 대신 $\mathbb{C}$를 쓰면 된다. 같은 논법으로 $\mathbb{C}P^n$ 역시 n차원 complex analytic manifold가 되고 따라서 이는 2n차원 real smooth manifold가 된다. quaternion $\mathbb{H}$에 대해서도 마찬가지이다.($\mathbb{H}P^n$는 4n 차원이 된다.)

5. An open subset of a smooth manifold is a smooth manifold.
manifold M과 atlas $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$에 대해 M에서 open인 N이 있다고 하자. 이 때 $\mathcal{F}_N := \{(U_\alpha \cap N, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap N})\}$ 은 N에 smooth structure를 준다. 예를 들어 $Gl(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \,|\, detA \neq 0\}$ 을 smooth structure를 가진 manifold로 보는데 이 때 $Gl(n, \mathbb{R})$을 $\mathbb{R}^{n^2} = M(n, \mathbb{R})$의 open subset으로서 보는 것이다.

6. A covering of a manifold is a manifold.
M을 manifold라고 하고 $\tilde{M}$을 M의 covering이라고 두자. 그러면, 각 점 $x \in M$에 대해 evenly cover되는 coordinate chart U가 존재한다. 이 때 각 $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$에 대해 U와 p에 의해 homeomorphic 한 근방 $\widetilde{U} \subset p^{-1}(U)$를 잡고

$\phi \circ p|_{\tilde{U}}$로 smooth chart를 주면 된다. 예를 들어 covering $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$ 을 생각할 수 있다. 이 때 얻어지는 $\mathbb{S}^n$상의 smooth structure와 앞 section에서 얻었던 smooth structure를 비교해 보라.(사실 이 둘은 같다.)

7. M, N are smooth manifolds$\Rightarrow$ $M \times N$ is a smooth structure.
M의 atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$와 N의 atlas $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$에 대해 $\{(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)\}$는 $M \times N$의 atlas가 된다. (일반적으로 $f : X \to Y$, $g : X' \to Y'$ 에 대해 $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$ 을 $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$로 정의한다.) 이를 보이기 위해 먼저 $(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)$를 아래그림처럼 잡자.

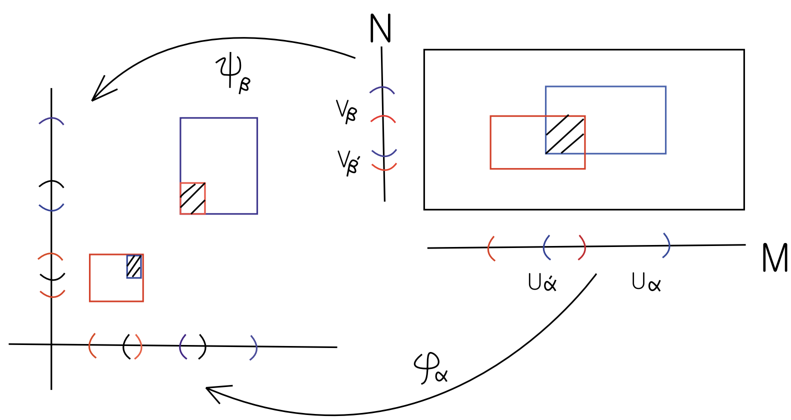

그림 11

위와 마찬가지의 방법으로 얻어진 또다른 chart $(U_{\alpha'}, \phi_{\alpha'}), (V_{\beta'}, \psi_{\beta'})$가 있다고 가정하면, $(\phi_\alpha \times \psi_\beta) \circ (\phi_{\alpha'} \times \psi_{\beta'})^{-1}$ 은 $\phi_\alpha \circ \phi_{\alpha'}^{-1} \times \psi_\beta \circ \psi_{\beta'}^{-1}$ 과 같고 각각이 $\mathcal{C}^\infty$ 이므로 이것 역시 $\mathcal{C}^\infty$ 이다. product manifold $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$, $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^n$(torus) 등은 모두 smooth manifold가 된다.