Smooth maps.

정의 1 *Let M,N be smooth manifolds.*
A continuous map $f : M \to N$ *is* $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{C}^k$*, respectively) if* $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ *is* $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{C}^k$*, respectively) for all coordinate maps* ϕ *on* M *and* ψ *on* N.
(또는 일반적으로 differentiable of class $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{C}^k$*, respectively)라고도 한다.)*

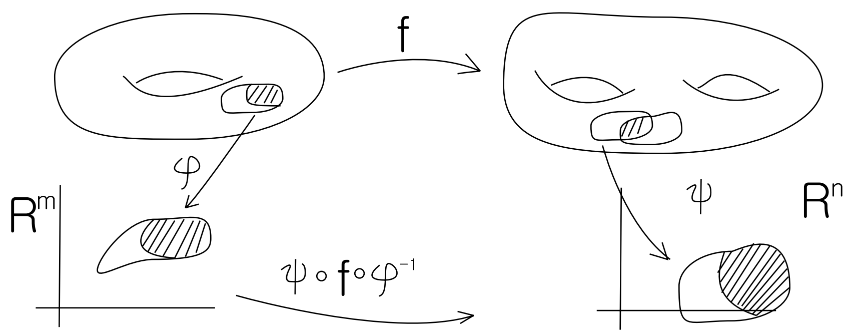

그림 12

$\mathcal{C}^\infty(M,N)$ =the set of $\mathcal{C}^\infty$-maps from M to N.

Note.
(1) f의 differentiability를 check하기 위해서 모든 coordinate map에 대해 확인해 볼 필요는 없다. M과 N의 atlas에 대해서만 해보면 된다.
(2)Differentiability는 연속성과 마찬가지로 local concept 이다. 즉

$f : M \to N$ *is* $\mathcal{C}^\infty$ *if and only if*

$\forall\, p \in M, \exists U$*,a neighborhood of* p *such that* $f|_U$ *is* $\mathcal{C}^\infty$. (**Exercise.**)

(3) A composite of $\mathcal{C}^\infty$ maps is also $\mathcal{C}^\infty$.
(4) $f : M \to N$ is $\mathcal{C}^\infty \iff g \circ f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ for $\forall g \in \mathcal{C}^\infty(N,\mathbb{R})$. (**숙제3(1)**)

정의 2 A diffeomorphism $f : M \to N$ is a homeomorphism such that f and f^{-1} are smooth.

숙제 3(2) manifold $\mathbb{R}$에 대해 $\phi(t) = t, \phi(t) = t^3$에 의해 generated된 structure를 각각 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$라고 할 때 $(\mathbb{R},\mathcal{F}_1)$과 $(\mathbb{R},\mathcal{F}_2)$가 diffeomorphic함을 보여라.

예.

1. M, N은 manifold이고, (U, ϕ)는 M의 coordinate chart일 때
$\phi : U \to \mathbb{R}^n$은 $\mathcal{C}^\infty$, $\phi : U \to \phi(U)$는 diffeomorphism이다.

2. U is open in M and U has the induced smooth structure $\Rightarrow i : U \hookrightarrow M$ is $\mathcal{C}^\infty$.

3. $M \times N$이 앞에서 언급한 product smooth structure를 가질 때
the projection map $p : M \times N \to M$ is $\mathcal{C}^\infty$.

4. $p : \widetilde{M} \to M$ is the covering with pull back structure$\Rightarrow$ p is $\mathcal{C}^\infty$.