Quotient smooth manifold.

앞 섹션에서 M이 smooth manifold이면 M의 smooth structure를 covering $\widetilde{M}$로 pull back시킬 수 있다는 사실을 보았다. 이번에는 반대로 $\widetilde{M}$이 smooth structure를 가지고 있을 때, 언제 M으로 smooth structure를 내릴 수 있는지를 살펴보자.

covering $p : \widetilde{M} \to M$ 에 대해 deck transformation group G의 action을 생각해보자. (위상수학2의 Covering space-Deck transformation 부분을 참조.) $p^{-1}(x)$에 대한 G의 action이 transitive 할 때 regular covering이라고 한다. 이 경우 M은 $\widetilde{M}/G$로 볼 수 있고 다음 내용이 성립한다.

Let $p : \widetilde{M} \to M$ be a regular covering. Suppose $\widetilde{M}$ has a smooth structure such that the deck transformation group acts on $\widetilde{M}$ as diffeomorphisms. Then M inherits the smooth structure of $\widetilde{M}$ such that p becomes $\mathcal{C}^\infty$.
(증명) Exercise.

예. covering $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $p(x) = e^{2\pi ix}$.
$\mathbb{R}$상에서 $\tau(x) = x + 1$로 두고 $G =< \tau >\cong \mathbb{Z}$로 두면 이는 deck transformation group이 된다. 이 경우 p는 당연히 regular covering이 된다. τ는 $\mathcal{C}^\infty$이므로 $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 에 smooth structure를 줄 수 있다. 보다 일반적으로 universal covering $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ 과 deck transformation group $G =< \tau_1, \cdots, \tau_n >\cong \mathbb{Z}^n (\tau_i(x) = x + e_i)$을 이용하면 $\mathbb{T}^n$상에 standard 한 smooth structure를 유도할 수 있다. 또 다른 예로는 covering $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$ 이 있다. 이 경우 antipodal map $\alpha(x) = -x$가 deck transformation group을 generate하고 $\alpha^2 = id$이므로 $G =< \alpha >\cong \mathbb{Z}/2$이 된다. 따라서 $\mathbb{S}^n/G = \mathbb{R}P^n$ 이 된다.(Exercise) 참고로 이 때 얻은 $\mathbb{R}P^n$의 structure는 이전에 얻었던 structure와 같다.