Tangent vector.

1. In $\mathbb{R}^n$, we have an obvious notion of tangent vectors as a **velocity vector of a curve.** We want a notion of tangent vector on a manifold.

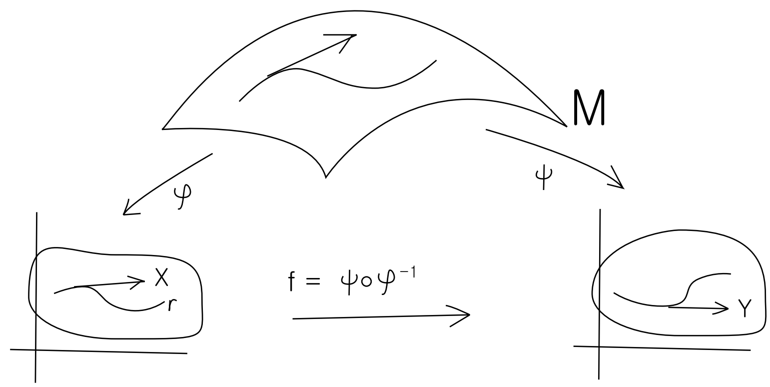

그림 13

먼저 manifold상에 curve $\sigma : I \subset \mathbb{R} \to M$를 생각하고 그것의 속도 vector를 생각하자 이 curve를 coordinate chart $\varphi(U)$에서 보았을때 $C : x = x(t)$로, 또다른 coordinate chart $\psi(U)$에서 보았을때 $y = y(t)$로 주어진다면 각각의 tangent vector $X = \frac{dx}{dt}$, $Y = \frac{dy}{dt}$가 주어지고 이 둘은 coordinate transition map $y = f(x) := \psi\varphi^{-1}(x)$에 의해 $Df(X) = Y$ 로 주어진다. 실제로 $Y = \frac{d}{dt}(f \circ x) = Df \cdot \frac{dx}{dt} = Df \cdot X$ 또는 이것을 기호 $f' = Df = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_m)}$ 을 이용하여 $\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$와 같이 쓸 수 있다.
따라서 manifold M상에 tangent vector를 정의하는 한 가지 방법은 coordinate transition의 differential에 의해 coordinate chart들에서의 tangent vector들을 identify한 것으로 보는 것이다.

2. Intrinsic way of defining tangent vector.

$\mathbb{R}^n$에서 tangent vector X를 characterize할 수 있는 한가지 방법은 방향미분(directional derivative)을 이용하여 X를 differential operator로 보는 방법이다. 다시말해 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$를 p점 근방에서 정의된 $\mathcal{C}^\infty$ 함수라 두었을 때 $Xf := D_X f = \nabla f \cdot X = \frac{d}{dt} |_0 \, (f \circ \sigma(t))$(여기에서 $\sigma(t)$는 X를 "fit"하는 곡선이다. 다시말하면 $\sigma(0) = p$, $\sigma'(0) = X$를 만족하는 곡선이다.)라 정의하자. 그러면 X 방향의 "directional derivative"는 다음 성질들을 만족한다.

< *Properties of directional derivative.* >

$$(*) \left[\begin{array}{l} X(f+g) = Xf + Xg \ , \ X(af) = a(Xf), \forall\, a \in \mathbb{R}.(linearity) \\ X(f \cdot g)(p) = (Xf)(p)g(p) + f(p)(X \cdot g)(p).(derivation\ property) \end{array} \right.$$

$(*)$를 만족하는 differential operator를 linear derivation이라고 한다.

역으로 linear derivation은 어떤 tangent vector X에 대한 directional derivative라는 것을 보일 수 있다.
(아래 정리1에서 $M = \mathbb{R}^n$이라 두면 된다.)

정의 1 *X is a* **tangent vector** *at $p \in M$ if X is a linear derivation defined on $\mathcal{C}^\infty(p)$ (= the space of $\mathcal{C}^\infty$ functions defind on some neighborhood of p) , i.e., $X : \mathcal{C}^\infty(p) \to \mathbb{R}$ with property $(*)$*

위의 정의가운데 $f, g \in \mathcal{C}^\infty(p)$에 대해 $f+g$, fg는 $domain(f) \cap domain(g)$상에서 정의된다(따라서 $f+g$, $fg \in \mathcal{C}^\infty(p)$를 만족하고 위의 정의가 well-defined된다.).

$T_pM :=$ the set of all tangent vector at p.
$\forall X, Y \in T_pM\,,\ (X+Y)f := Xf + Yf,\ (aX)f := a(Xf)$로 정의하면
T_pM은 vector space가 된다.

정리 1 *Let (U, φ) be a coordinate chart about $p \in M$, and let $x_i = u_i \circ \varphi$ ($u_i = i$ th coordinate function on $\mathbb{R}^n$). Define "coordinate tangent vectors" at p, $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ (or $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$) by $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p f = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}|_{\varphi(p)}$. Then $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\}$ forms a basis for the vector space T_pM and each $X \in T_pM$ can be represented uniquely as*

$$X = \sum_{i=1}^{n} (Xx_i) \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \quad .$$

정리의 증명을 하기전에 몇가지 사실을 살펴보자. 위에서 살펴본 것처럼 우리는 벡터 X를 operator로 이해하고 있는데 (i.e $Xf = D_X f$) $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$는 정의에의해 편도함수 operator로 이해할 수 있다. 특히 이 경우 $f \in \mathcal{C}^\infty(p)$에 대한 action을 $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p f$ 또는 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$로 표기한다.($X$가 p점 근방에서 정의된 vector field일 때 $f \in \mathcal{C}^\infty(p)$에 대해 $Xf \in \mathcal{C}^\infty(p)$이고 $(Xf)(p) = X_p f$이다.)

Note 1. 위와 같이 정의한 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 는 당연하게 tangent vector가 된다.

$\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(p)$,
(1). linearity

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}|_p(f+g) &= \frac{\partial((f+g)\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}|_{\varphi(p)} \\
&= \frac{\partial((f\circ\varphi^{-1}+g\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}|_{\varphi(p)} \\
&= \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}|_{\varphi(p)} + \frac{\partial(g\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}|_{\varphi(p)} (\because linearity) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}|_p f + \frac{\partial}{\partial x_i}|_p g
\end{aligned}
$$

(2). derivation property

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}|_p(f\cdot g) &= \frac{\partial((f\cdot g)\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}|_{\varphi(p)} \\
&= \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})\cdot(g\circ\varphi^{-1}))}{\partial u_i}|_{\varphi(p)} \\
&= \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}|_{\varphi(p)}(g\circ\varphi^{-1})|_{\varphi(p)} + (f\circ\varphi^{-1})|_{\varphi(p)}\frac{\partial(g\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}|_{\varphi(p)} \\
&= \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}|_{\varphi(p)} g(p) + f(p)\frac{\partial(g\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}|_{\varphi(p)} \\
&= (\frac{\partial}{\partial x_i}|_p f) g(p) + f(p)(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p g)
\end{aligned}
$$

$\therefore \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_pM$.

2. $M \subset \mathbb{R}^n$ 인 경우, $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$는 $p \in M$에서 기하학적으로 $\varphi(p)$점에서의 i번째 좌표 방향으로의 단위 vector $e_i(=\frac{\partial}{\partial u_i}$ as an operator)의 $D\varphi^{-1} = \varphi_*^{-1}$에 의한 image vector가 된다. 이것을 확인해보기 위해 "$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$" $= \varphi_*^{-1}(e_i)$라 두자. 그러면 이것은 $\varphi(p) = (a_1, \cdots, a_n)$이라 두었을 때 curve $\sigma(t) = \varphi^{-1}(a_1, \cdots, t, \cdots, a_n)$의

$t=a_i$에서의 tangent vector가 되고 $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(p)$에 대해

$$\begin{aligned} {}''\frac{\partial}{\partial x_i}|_p{}'' f &= \frac{d}{dt}|_{t=a_i}(f\circ\sigma) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=a_i}(f\circ\varphi^{-1})(a_1,\cdots,t,\cdots,a_n) \\ &= \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}|_{\varphi(p)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}|_p f \end{aligned}$$

이므로 $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$는 $''\frac{\partial}{\partial x_i}|_p''$방향으로의 directional derivative를 주는 것을 알 수 있다.

즉, $\mathbb{R}^n$ 내에서는 실제기하와 abstract한 정의가 실제로 일치한다.
이제 정리1 을 증명하기 위해 다음의 보조 정리를 먼저 보이자.

보조정리 2 $p\in M, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(p)$, *f can be represented as of the form* $f = f(p) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i(p))g_i$ *, where* $g_i \in \mathcal{C}^\infty(p)$ *and* $g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

증명 (U,φ)를 p에서의 coordinate chart라고 두자. $\varphi(U)$안의 $\varphi(p)=a$의 근방 V에 대해 F를 $F = f\circ\varphi^{-1}|_V : V(\subset\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$, $\varphi(p)=a$ 로 정의하면

$$\begin{aligned} F(x)-F(a) &= F(a+t(x-a))|_{t=0}^{t=1} \quad , \qquad let\ \ F(a+t(x-a)) = G(t) \\ &= \int_o^1 \frac{d}{dt}G(t)dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}F(a+t(x-a))dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_i}(a+t(x-a))(x_i-a_i)dt \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i-a_i)\int_o^1 \frac{\partial F}{\partial u_i}(a+t(x-a))dt \end{aligned}$$

$h_i(x) = \int_o^1 \frac{\partial F}{\partial u_i}(a+t(x-a))dt$라 두면

$\therefore F(x) = F(a) + \sum_{i=1}^n (u_i(x)-u_i(a))h_i(x)$, $h_i(a) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(a)$.

이제 $x=\varphi(q)$, $a=\varphi(p)$, $u_i\circ\varphi = x_i$, $F\circ\varphi = f$ 로 두면

$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^{n}(x_i(q) - x_i(p))g_i(q)$ (여기에서 $g_i = h_i \circ \varphi$) 이고,
$g_i(p) = (h_i \circ \varphi)(p) = h_i(a) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(a) = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. □

이제 마지막으로 정리 1을 증명하자.

증명(proof of the theorem1)
보조정리에 의하면 $f = f(p) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i(p))g_i$ 으로 표현되고 따라서
$Xf = X(f(p)) + \sum_{i=1}^{n}\{X(x_i - x_i(p))g_i(p) + (x_i - x_i(p))(p)Xg_i\}$
$X(f(p))$, $X(x_i(p))$, $(x_i - x_i(p))(p)$는 모두 0이 되고, 따라서
$Xf = \sum_{i=1}^{n}(Xx_i)g_i(p) = \sum_{i=1}^{n}(Xx_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.
따라서 $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\}$가 T_pM을 span함은 보였고 linearly independent함을 보이면 된다. 만일 $\sum_{j=1}^{m}c_j\frac{\partial}{\partial x_j} = 0$ 이라면 $\sum_{j=1}^{m}c_j\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0$ 이다. 그런데

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\{(u_i \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}\}}{\partial u_j} = \frac{\partial u_i}{\partial u_j} = \delta_{ij} \text{ 이므로}$$

$\forall c_i = 0$ 을 얻을 수 있고 따라서 증명이 완성되었다.

□

Note. p근방에 두개의 chart $(U, x), (V, y)$가 있을 때 각 chart에 의해 결정되는 T_pM의 basis $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$와 $\{\frac{\partial}{\partial y_i}\}$는 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$ 의 관계가 있다.
이를 보이기 위해 임의의 한 tangent vector X를 $\{\frac{\partial}{\partial y_i}\}$ 로 표현하면 $X = \sum_{i=1}^{n}(Xy_j)\frac{\partial}{\partial y_j}$ 인데 특히 $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$인 경우에는 $\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial y_j}{\partial x_i})\frac{\partial}{\partial y_j}$ 가 된다.
주의할 것은 위의 식을 만족하려면 행렬곱이 열벡터가 아닌 행벡터로 곱해진다는 사실이다. 따라서 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$ 가 아닌 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$ 를 만족하게 된다. 여기에서 $\frac{\partial y}{\partial x}$는 coordinate transition map의 Jacobi 행렬이고 ($\because \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{\partial(y_i\circ x^{-1})}{\partial u_j} = \frac{\partial(u_i\circ y\circ x^{-1})}{\partial u_j}$), $\frac{\partial}{\partial x}$와 $\frac{\partial}{\partial y}$는 $\frac{\partial}{\partial x} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})$, $\frac{\partial}{\partial y} = (\frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_n})$으로 주어지는 행벡터이다.
(이것과 $\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{dt}$를 비교해보라, 이 경우에 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$는 행벡터가 아니라 열벡터이다.)