Tangent bundle.

M이 n차원 $\mathcal{C}^\infty$-manifold 일 때 다음과 같이 TM을 정의한다.
$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM = \{X_p = (p, X) \mid X_p \in T_pM\ ,\ p \in M\}$
$\pi : TM \to M$, $\pi(X_p) = p$.
Then TM is a $\mathcal{C}^\infty$-manifold of dimension 2n, called **tangent bundle** *of M, such that p is $\mathcal{C}^\infty$.*

실제로 TM이 manifold가 됨을 보이자.

(1) Coordinate chart for TM :
(U, ϕ)를 M상의 coordinate chart라 두고 $x_i = u_i \circ \phi$를 coordinate function 으로 두면 $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})$은 T_pM 의 basis를 이룬다. 이것의 dual basis를 $(dx_1 \cdots, dx_n)$이라 두자. 즉
$dx_i : T_pM \to \mathbb{R}$, linear functional such that $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$.
그러면 p에서의 tangent vector X_p는 $X_p = \sum_{j=1}^{n} (Xx_j)\dfrac{\partial}{\partial x_j}$를 만족하므로

$dx_i(X_p) = \sum_{j=1}^{n} (Xx_j) dx_i(\dfrac{\partial}{\partial x_j}) = Xx_i$ 가 된다.
위에서 볼 수 있듯이 dx_i로부터 X_p의 각 계수들을 알아낼 수 있으므로 이를 이용해서 다음과 같이 TM에 chart $(\widehat{U}, \widehat{\phi})$를 준다.
$\widehat{U} = \pi^{-1}(U)$로 주고, $\widehat{\phi} : \widehat{U} \to \phi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ 를

$$\widehat{\phi}(X_p) = (\underbrace{x_1(p), \cdots, x_n(p)}_{\phi(p)}, \underbrace{dx_1(X_p), \cdots, dx_n(X_p)}_{\text{coefficients of } X_p\ w.r.t(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdot\cdot, \frac{\partial}{\partial x_n})})$$

그러면 $\widehat{\phi}$는 bijection을 주고(set으로서) 이제 TM에 topology를 주자.

(2) Topology of TM : weak topology.
즉 $\{\widehat{U} \mid (U, \phi) : coordinate\ chart\ for\ M\}$ 이 결정하는 coherent topology를 준다. (앞에서 이미 했던 coherent topology를 가지기 위한 두 가지 조건을 만족하므로 topolgy를 줄 수 있다.)

(3) 마지막으로 chart간에 $\mathcal{C}^\infty$-related 됨을 보이자 :
두 chart $(\widehat{U}, \widehat{\phi}), (\widehat{V}, \widehat{\psi})$ 에 대해 $U \cap V = W$라 두자.

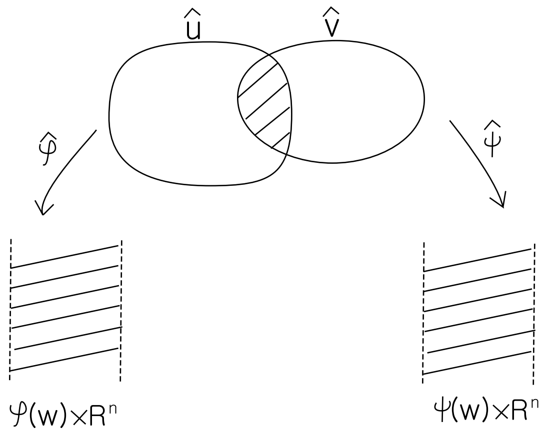

그림 14

W의 $\widehat{\phi}$에 대한 image는 $\phi(W)\times\mathbb{R}^n$이 되고 $\widehat{\psi}$에 대한 image는 $\psi(W)\times\mathbb{R}^n$이 된다. 이 사이에 transition map $\widehat{\psi}\circ\widehat{\phi}^{-1}$를 계산하기 위하여 ϕ,ψ사이의 transition map $f=\psi\circ\phi^{-1}$를 이용하자.

$X=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial}{\partial y_j}$ 이라 두면 $(p,X)\in\pi^{-1}(W)$에 대해

$$\begin{array}{ccc} & \pi^{-1}(W) & \\ \widehat{\phi}\swarrow & & \searrow\widehat{\psi} \\ \phi(W)\times\mathbb{R}^n & \to & \psi(W)\times\mathbb{R}^n \\ (x,a) & \mapsto & (y,b)\end{array}\quad,\quad \phi(p)=x,\psi(p)=y$$

으로 쓸 수 있고 $y=f(x)$, $b=df_x(a)$ where $df_x=\frac{\partial y}{\partial x}(x)$ 로 주어진다는 것을 보일 수 있다. 사실상 x에서 y로 가는 map은 f에 의해 잘 정의되고 앞절에서 얻었던 관계식 $\displaystyle\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j}$을 $X=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial x_i}$에 대입하자. 그러면

$$X_p=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j}=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial y_j}{\partial x_i})\frac{\partial}{\partial y_j}$$

이 되어 $b_i=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}a_j$ 를 얻을 수 있다. 따라서 $b=df_x(a)$가 되고 각 $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$는 x에 관해 smooth function이므로 $\widehat{\psi}\circ\widehat{\phi}^{-1}$는 smooth function 이 된다.

Remark. $X\in T_pM$를 x,y coordinate 로 각각 나타내면 $X=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial x_i}=$

$\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial y_i}$라 쓸 수 있는데 위에서 $dy_i(X) = b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} a_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j(X)$ 이므로 $dy_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j$ 가 성립함을 알 수 있다. 이것을 행렬로 표시하면 $dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx$이고 여기서 dx, dy는 열벡터로 본다. 이 관계는 앞에서 tangent vector의 x, y coordinate chart에서 본 관계식 $\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dt}$와 formally 일치함을 볼 수 있다. 따라서 우리가 통상 쓰는 미분 dx와 dy등은 coordinate change에서 tangent vector의 dual vector와 같이 변화함을 알 수 있다. 이런 의미에서 우리가 직관적으로 무한소의 변화로 이해하고 있는 미분을 수학논리적으로는 tangent vector의 dual(cotangent vector)로 정의할 수 있다.

위의 dx_i는 $\frac{\partial}{\partial x_i}$의 dual이 되고 이 dx_i들이 형성하는 vector space들을 생각할 수 있다. 이는 각 점 p마다 T_pM의 dual vector space $(T_pM)^*$로 생각할 수 있고, 이들의 총체를 cotangent bundle T^*M이라고 한다.

숙제 4. $T^*M = \bigcup_{p \in M} (T_pM)^*$: cotangent bundle. Do the same for T^*M as we did for TM.