Differential.

정의 1 *$\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ is $\mathcal{C}^\infty$. Then the* **differential** *of φ ,*
$\varphi_* = d\varphi : TM \longrightarrow TN$ is defined by ($d\varphi(X_p) \in T_{\varphi(p)}N$ and)
$d\varphi(X_p)g = X_p(g \circ \varphi)$,$\forall g \in \mathcal{C}^\infty(\varphi(p))$

check 1. $d\varphi(X_p)$ **는** $\mathcal{C}^\infty(\varphi(p))$ **위에서의 linear derivation이 된다.**
i.e., $d\varphi(X_p) \in T_{\varphi(p)}N$

증명

$$\begin{aligned} d\varphi(X_p)(f+cg) &= X_p(f+cg)\circ\varphi \\ &= X_p(f\circ\varphi + cg\circ\varphi) \\ &= X_p(f\circ\varphi) + cX_p(g\circ\varphi) \qquad (\because X_p : \text{linear derivation}) \\ &= d\varphi(X_p)f + cd\varphi(X_p)g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\varphi(X_p)(fg) &= X_p((fg)\circ\varphi) \\ &= X_p((f\circ\varphi)(g\circ\varphi)) \\ &= (g\circ\varphi)(p)X_p(f\circ\varphi) + (f\circ\varphi)(p)X_p(g\circ\varphi) \quad (\because X_p : \text{linear derivation}) \\ &= g(\varphi(p))d\varphi(X_p)f + f(\varphi(p))d\varphi(X_p)g \end{aligned}$$

□

2. $d\varphi_p := d\varphi\,|_{T_pM} : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$ **은 선형이다.**

증명

$$\begin{aligned} d\varphi(X_p + cY_p)g &= (X_p + cY_p)(g\circ\varphi) \\ &= X_p(g\circ\varphi) + cY_p(g\circ\varphi) \\ &= d\varphi(X_p)g + cd\varphi(Y_p)g \\ &= (d\varphi(X_p) + cd\varphi(Y_p))g \end{aligned}$$

□

3. $d\varphi$ **는** $\mathcal{C}^\infty$ **이다.**

증명 먼저 국소적으로 성립하는 것을 보이겠다. 다시말하면 p와 $\varphi(p)$근방의 적당한 chart들, (U,x)와 (V,y)에 대하여 성립하는 것을 보인다는 뜻이다.

$\widehat{y} \circ d\varphi \circ \widehat{x}^{-1} : (x(p), a_1, \cdots, a_m) \mapsto (y(\varphi(p)), b_1, \cdots, b_n)$이라 두자.

잠정적으로 $d\varphi(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\partial}{\partial y_j}$로 두면

$\frac{\partial}{\partial x_i}(y_k \circ \varphi) = d\varphi(\frac{\partial}{\partial x_i}) y_k = \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\partial y_k}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^{m} c_j \delta_{jk} = c_k$가 되어

$d\varphi(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(y_j \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial y_j}$ 이다.

$$\therefore d\varphi(\underbrace{X_p}_{\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}}) = d\varphi(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_{j=1}^{m} (\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial (y_j \circ \varphi)}{\partial x_i}}_{b_j}) \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

여기에서 $b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial (y_j \circ \varphi)}{\partial x_i}$를 살펴보면

$\frac{\partial (y_j \circ \varphi)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial u_i}(u_j \circ y \circ \varphi \circ x^{-1})$ 이므로 φ의 local chart에서의 Jacobian이 되어 x의 $\mathcal{C}^\infty$ function이 되는 것을 알 수 있다.

따라서 $\widehat{y} \circ d\varphi \circ \widehat{x}^{-1} : (x(p), a_1, \cdots, a_m) \mapsto (y(\varphi(p)), b_1, \cdots, b_n)$은 $\mathcal{C}^\infty$이다.

다시 처음으로 돌아가면 $\mathcal{C}^\infty$이라는 것은 국소적인 성질인데 임의의 $p \in M$에 대해서 위와 같이 성립하므로 사실상 $d\varphi$가 대역적으로 $\mathcal{C}^\infty$이라는 것을 뜻한다. 그러므로 증명이 끝난다. □

4. Chain rule : $d(\psi \circ \varphi) = d\psi \circ d\varphi$.

증명 임의의 X_p에 대해 $d(\psi \circ \varphi)(X_p) = d\psi \circ d\varphi(X_p)$임을 보이자.

$$\begin{aligned} d(\psi \circ \varphi)(X_p)(f) &= X_p(f \circ \psi \circ \varphi) \\ &= d\varphi(X_p)(f \circ \psi) \\ &= d\psi(d\varphi(X_p))(f) \\ &= (d\psi \circ d\varphi)(X_p)(f) \end{aligned}$$

□

5. M위의 곡선 σ의 tangent vector.

tangent vector of σ at t $= \frac{d\sigma}{dt} := d\sigma(\frac{d}{dt}) = \sigma_*(\frac{d}{dt}) \in T_{\sigma(t)}M$

$\frac{d\sigma}{dt} \cdot g = d\sigma(\frac{d}{dt})g = \frac{d}{dt}(g \circ \sigma)$=directional derivatives of g in the derivation of $\frac{d\sigma}{dt}$.

특히 $g = x_i$인 경우에는 $X = \sum_{i=1}^{n}(Xx_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$ 이므로

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{d\sigma}{dt}\cdot x_i)\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(x_i\circ\sigma)\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d\sigma_i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Geometric interpretation of $d\varphi : d\varphi(X_p) = ?$
chain rule을 쓰면 $d\varphi(\frac{d\sigma}{dt}) = \frac{d}{dt}(\varphi\circ\sigma)$ 가 된다. 다음 식에서 이를 알 수 있다.
$d\varphi(\frac{d\sigma}{dt}) = d\varphi(d\sigma(\frac{d}{dt})) = d(\varphi\circ\sigma)(\frac{d}{dt}) = \frac{d}{dt}(\varphi\circ\sigma)$.

따라서 φ가 구체적으로 주어진 경우에 $d\varphi(X_p)$를 계산하는 한가지 방법은 먼저 X_p를 "fit"하는 (i.e.,$\sigma(0) = p$ and $\frac{d\sigma}{dt}|_0 = X_p$) 계산 편리한 아무런 곡선 σ를 잡는다. 그리고 $\varphi\circ\sigma$를 계산한 후 그것의 tangent vector $\frac{d}{dt}(\varphi\circ\sigma)$를 계산하면 된다. 많은 경우에 이러한 방식으로 $d\varphi$를 구체적으로 계산할 수 있다.

Remark. 앞에서 coordinate function $x_i : U\subset M\to\mathbb{R}$에 대해 쓴 differential로써의 dx_i 와 $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$의 dual basis로써의 $\{dx_i\}$ 는 사실 일치한다. 이를 보이기 전에 먼저 real valued function f에 대하여 df와 f_*를 구분해서 정의하자.

<Definition of df >

$f : M\to\mathbb{R}, \mathcal{C}^\infty$에 대해 $f_*(X_p) = (f_*(X_p)\cdot t)\frac{d}{dt} = X_p(t\circ f)\frac{d}{dt} = X_p(f)\frac{d}{dt}$.

Define $df : TM \xrightarrow{f_*} T\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad i.e.,\quad$ $df_p : T_pM \xrightarrow{f_*} T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R} : linear$
$\qquad a\frac{d}{dt} \mapsto a \qquad\qquad X_p \mapsto (X_pf)\frac{d}{dt} \mapsto X_pf$

$df_p \in (T_pM)^*$이므로 $df_p = \sum a_i dx_i$로 표시되고 이 때 정의에 의해
$df_p(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial x_i}f(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}|_p f = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$이다.
$df_p(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \sum a_i dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = a_j \qquad \therefore df_p = \sum(df_p(\frac{\partial}{\partial x_i}))dx_i = \sum(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p))dx_i$
$\therefore df = \sum\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$.

이제 coordinate function x_i에 대해 x_i 역시 U상의 real valued function이므로 이것의 differential "dx_i"를 생각할 수 있고, 이를 위 내용에 적용시키면

$$"dx_i" = \sum\frac{\partial x_i}{\partial x_j}dx_j = dx_i.$$

즉 위 식의 좌변은 coordinate function x_i의 differential로서의 dx_i이고 우변은 $\frac{\partial}{\partial x_i}$의 dual basis로 본 것인데 이 둘이 일치함을 알 수 있다.